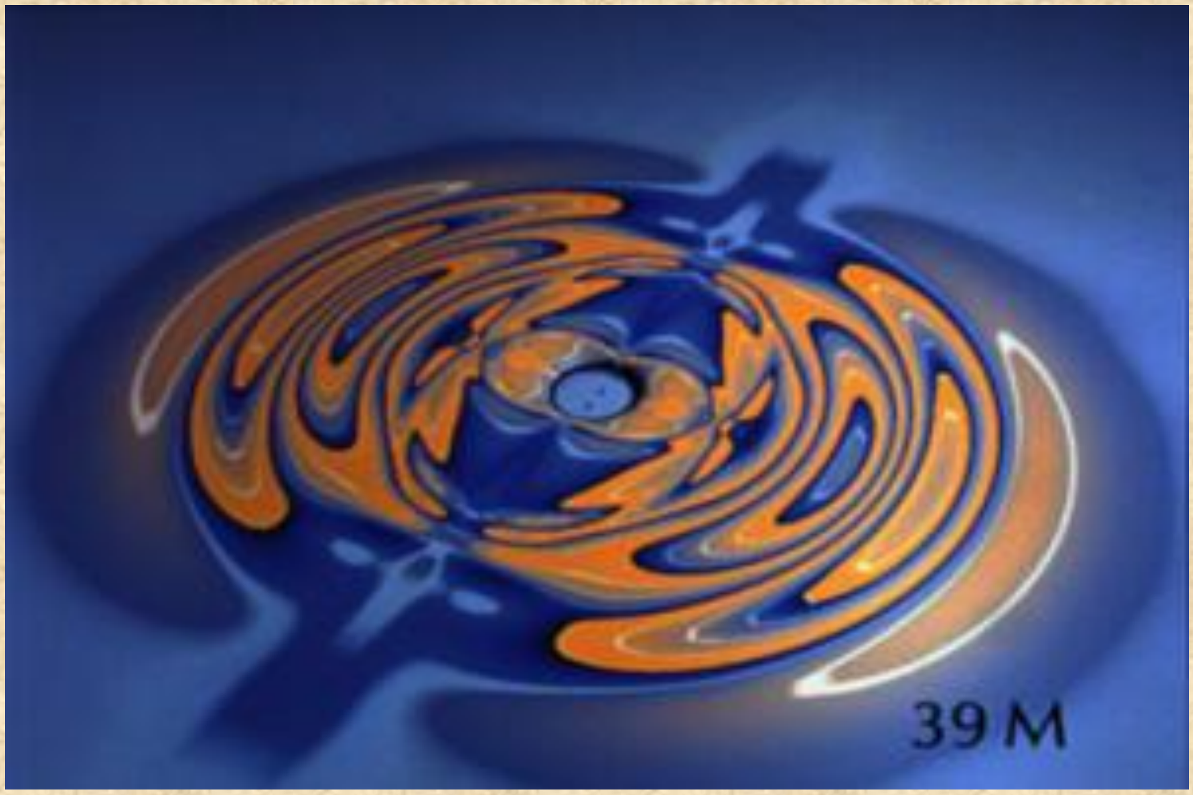
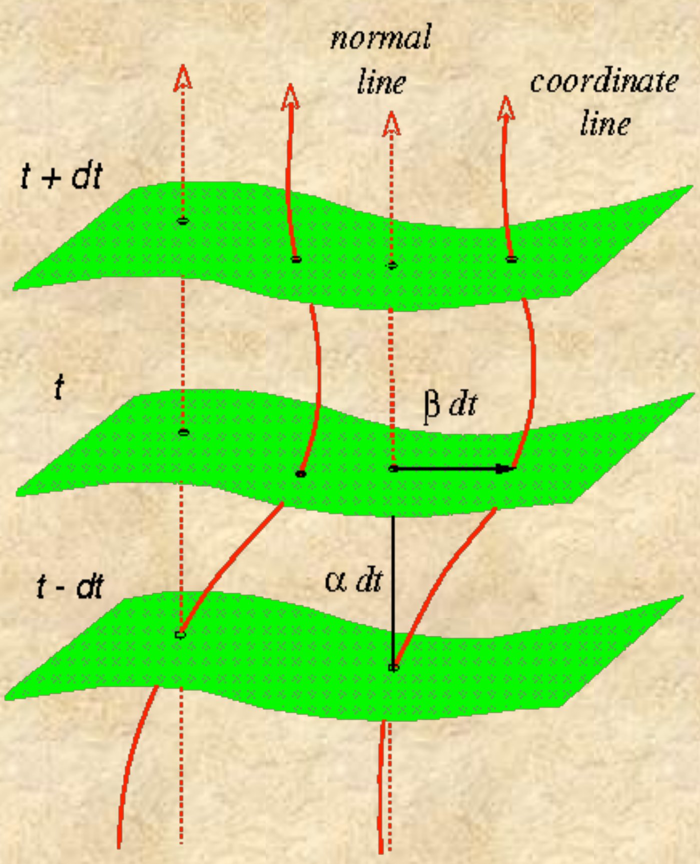
Relatividad Numérica, Colisiones de Agujeros Negros y Ondas Gravitacionales



Miguel Alcubierre
Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM

Relatividad Numérica

Descomposición 3+1



En el formalismo 3+1, el espacio-tiempo se rebana en hiper-superficies espaciales de "tiempo constante" (una foliación).

La 4-métrica se re-escribe como:

$$ds^2 = \left(-\alpha^2 + \beta_i \beta^i\right) dt^2 + 2\,\beta_i\, dt dx^i + \gamma_{ij}\, dx^i dx^j$$

- α (función de lapso): mide el tiempo propio entre hipersuperficies espaciales.

$$d\tau = \alpha(t, x^i)\, dt$$

- β^i (vector de corrimiento): relaciona coordenadas entre hipersuperficies adyacentes.

$$x^i_{t+dt} = x^i_t - \beta^i(t, x^j)\, dt$$

- γ_{ij} (métrica espacial): mide distancias dentro de cada hipersuperficie espacial.

$$dl^2 = \gamma_{ij}\, dx^i dx^j$$

Descomposición 3+1 de las ecuaciones de Einstein

En el formalismo 3+1, las ecuaciones de Einstein se separan en dos grupos mediante proyecciones paralelas y normales a las hipersuperficies espaciales:

- 4 ecuaciones sin derivadas temporales: "constricciones"
- 6 ecuaciones con derivadas temporales: "evolución"

Las constricciones toman la forma:

- Constricción hamiltoniana:

$$R^{(3)} + (\mathrm{tr}\,\mathrm{K})^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi\rho$$

- Constricción de momento:

$$\nabla_j \left[K^{ij} - \gamma^{ij}\mathrm{tr}\,\mathrm{K}\right] = 8\pi j^i$$

Las ecuaciones de evolución

La proyección de las ecuaciones de Einstein a la hipersuperficie resulta en las siguientes ecuaciones:

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + \nabla_i^{(3)} \beta_j + \nabla_j^{(3)} \beta_i$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} \;\; = \;\; & \beta^a \nabla_a K_{ij} + K_{ia} \nabla_j \beta^a + K_{ja} \nabla_i \beta^a \\ & - \nabla_i \nabla_j \alpha + \alpha \left[R_{ij}^{(3)} - 2 K_{ia} K_j^a + K_{ij} \, \mathrm{tr}\, \mathrm{K} \right] \\ & + 4\pi\alpha \left[\gamma_{ij} \left(\mathrm{tr}\, \mathrm{S} - \rho \right) - 2 S_{ij} \right] \, , \end{aligned}$$

Estas son las llamadas ecuaciones de “Arnowitt-Deser-Misner” (“ADM”).

Las ecuaciones de ADM no son únicas!

Siempre se pueden añadir múltiplos arbitrarios de las constricciones para obtener nuevas ecuaciones de evolución igualmente válidas. Las nuevas ecuaciones tendrán las mismas soluciones físicas, pero diferentes soluciones no físicas, diferentes propiedades matemáticas y diferentes propiedades de estabilidad.

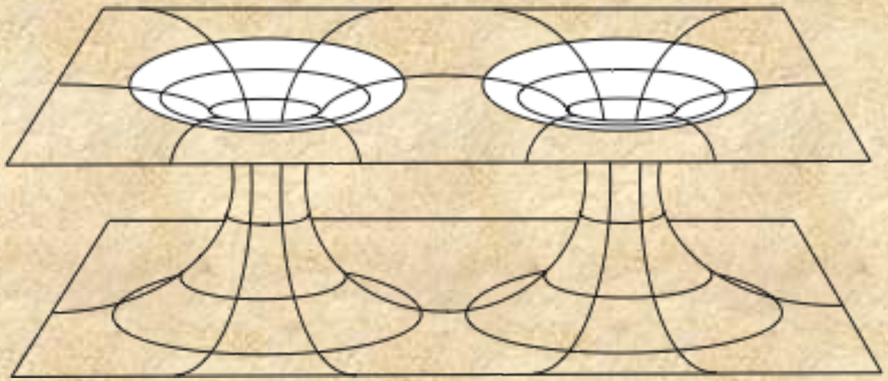
Datos iniciales para agujeros negros

Datos iniciales para agujeros negros se construyen normalmente utilizando un modelo "topológico" que consiste en conectar universos distintos con "agujeros de gusano" (túneles de Einstein-Rosen) .

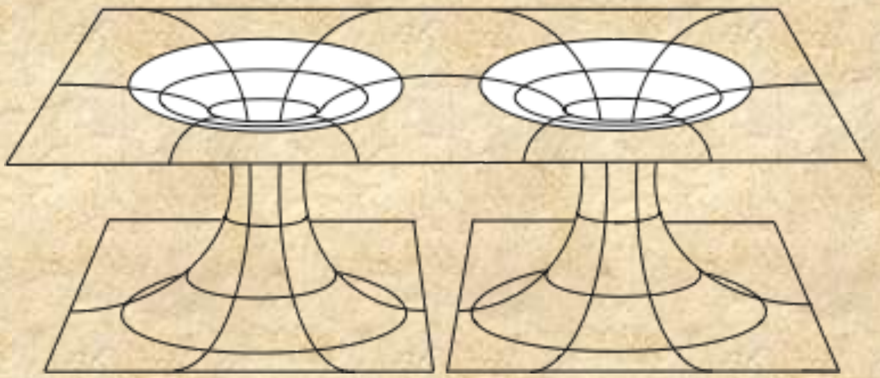
Esta idea proviene de que la solución de Schwarzschild posee un agujero de gusano en su interior.

Datos para más de un agujero negro pueden construirse conectando nuestro Universo a un solo universo paralelo (datos tipo Misner) o distintos universos (datos tipo Brill-Lindquist).

Misner type data



Brill-Lindquist type data



Condiciones de Lapso

¿Como escoger la función de lapso? Algunos ejemplos son:

• Foliación geodésica: $\alpha = 1$

Líneas normales a las hipersuperficies son geodésicas (observadores en caída libre). Esta es muy mala elección pues las geodésicas pueden enfocarse produciendo singularidades en las coordenadas (cáusticas).

• Foliación maximal: tr$K = 0$

Los elementos de volumen permanecen constantes, por lo que se evita el enfoque. Esta es una elección muy común e implica que la función de lapso obedece una ecuación elíptica:

$$\nabla^2 \alpha = \alpha \left[K_{ij} K^{ij} + 4\pi \left(\rho + S \right) \right]$$

Desventaja: las ecuaciones elípticas son muy difíciles de resolver!

• Foliaciones algebraicas:

El lapso, o su derivada temporal, se dan en términos de variables geométricas.

Lapso de Bona-Masso

Un ejemplo de foliación algebraica muy común es la familia de Bona-Masso que da la derivada temporal de la función de lapso en términos de trK:

$$\partial_t \alpha = -\alpha^2 f(\alpha) \, \mathrm{tr} K$$

Donde *f* es una función positiva algebraica. Esta condición implica que la función de lapso obedece una ecuación de onda generalizada, con velocidad de onda proporcional a $(f)^{1/2}$.

Casos particulares son:

• Foliación armónica: *f* = 1. Esta condición es equivalente a pedir: $\Box t = 0$ y puede integrase para dar:

$$\alpha = F(x^i) + \gamma^{1/2}$$

• Foliación 1+log: *f* = N/α. Para N>2 esta condición imita la foliación maximal. Tambien puede integrarse para obtener:

$$\alpha = F(x^i) + \log \gamma^{N/2}$$

Condiciones de Corrimiento

Durante mucho tiempo la opción usual era tomar $\beta^i = 0$, pues simplifica enormemente las ecuaciones y en muchos casos es una buena elección.

Para agujeros negros es crucial tomar β^i distinto de cero. De otra manera las coordenadas "caen" a los agujeros y son "arrastradas" en la rotación.

Una de las condiciones mas conocida es el llamado "vector de distorsión mínima", que parte de considerar la distorsión de los elementos de volúmen:

$$\Sigma_{ij} := \frac{1}{2}\gamma^{1/3}\partial_t\tilde{\gamma}_{ij}$$

Si se minimiza la integral del cuadrado de este tensor sobre una hipersuperficie, se obtiene la condición de distorsión mínima:

$$\nabla_j \Sigma^{ij} = 0$$

Que se reduce a 3 ecuaciones elípticas acopladas para el vector de corrimiento:

$$D^j D_j \beta^i + \frac{1}{3} D^i D_j \beta^j + R^i_j \beta^j - 2D_j(\alpha[K^{ij} - \frac{1}{3}K]) = 0$$

Sistemas bien puestos

Consideremos un sistema de ecuaciones de evolución de la forma:

$$\partial_t u = P(D)u$$

Se dice que este sistema esta *bien puesto* si podemos definir una norma tal que:

$$|| u(t,x) || \leq k\, e^{\alpha t} \, || u(0,x) ||$$

con α y k constantes independientes de los datos iniciales. Es decir, la norma de la solución se puede acotar con la norma de los datos iniciales y una misma exponencial para datos iniciales arbitrarios.

En términos mas intuitivos: un sistema esta bien puesto si su solución depende de manera continua de los datos iniciales.

Casi todos los sistemas de ecuaciones de evolución en la física estan bien puestos (pero no todos!).

Hiperbolicidad

Consideremos un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\partial_t \vec{u} + \sum_k M^k \partial_k \vec{u} = \vec{q}$$

donde el u es un vector de variables dinámicas, las M's son matrices y q es un vector fuente que depende de las u's pero no se sus derivadas.

• Si las matrices M tienen eigenvalores λ_i reales se dice que el sistema es "hiperbólico".

• Si además, las matrices M tienen un conjunto completo de eigenvectores $\mathbf{e}_i$, se dice que el sistema es "fuertemente hiperbólico", de otra forma es solo "débilmente hiperbólico".

• Si el sistema es fuertemente hiperbólico y las 3 matrices M son simétricas, entonces el sistema es "simétrico hiperbólico".

Un sistema fuertemente o simétricamente hiperbólico esta bien puesto, y uno que solo es débilmente hiperbólico no lo esta.

¡ADM es débilmente hiperbólico!

El análisis de ADM lleva a varias observaciones importantes:

1. La hiperbolicidad depende de la elección del lapso. En particular, tomar un lapso fijo (o conocido a priori) NO permite obtener un sistema fuertemente hiperbólico.
2. Las constricciones de momento juegan un papel crucial en la hiperbolicidad del sistema.

Si se elige la condición de foliación de Bona-Masso, ADM resulta ser "casi" fuertemente hiperbólico en el siguiente sentido:

De los 27 campos independientes (3 derivadas del lapso, 18 derivadas de la métrica y 6 K's), se encuentran 15 eigencampos con velocidad $-\beta^i$, 6 eigencampos que se propagan con la velocidad de la luz, y 2 eigencampos que se propagan con velocidad $f^{1/2}$ (velocidad de norma). Es decir, fallan 4 eigencampos!

Formulación BSSN

Existe una formulación fuertemente hiperbólica que ha mostrado ser en la práctica muy superior a ADM. Esta es la formulación BSSN (Baumgarte, Shapiro, Shibata, Nakamura), que se basa en una transformación conforme de la métrica:

$$\tilde{\gamma}_{ij} = e^{-4\phi}\gamma_{ij}$$

Además, la curvatura extrínseca se separa en su traza y su parte sin traza:

$$K = tr(K_{ij}) \qquad \tilde{A}_{ij} = e^{-4\phi}\left(K_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}K\right)$$

La ecuación de evolución de K se modifica utilizando la constricción Hamiltoniana para eliminar el escalar de Ricci.

Pero esto no es todo, además, se introducen las funciones:

$$\tilde{\Gamma}^i = \tilde{\gamma}^{jk}\tilde{\Gamma}^i_{jk}$$

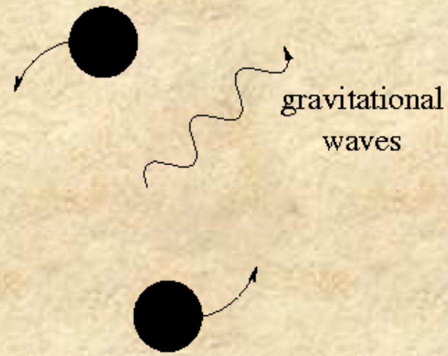
Finalmente, las ecuaciones de evolución de estas funciones se modifican sumando un múltiplo de las constricciones de momento.

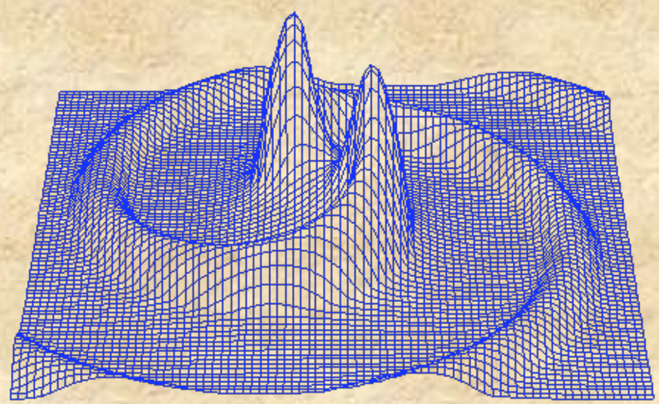
Colisiones de agujeros negros

Colisiones de Agujeros Negros: el Problema de Dos Cuerpos

El problema de dos cuerpos en órbita fue resuelto en la teoría de la gravitación universal de Newton hace más de 300 años.

En la relatividad general, el problema de dos cuerpos más sencillo es el de dos agujeros negros en órbita. Este problema apenas fue resuelto en los últimos años utilizando sofisticadas simulaciones numéricas.



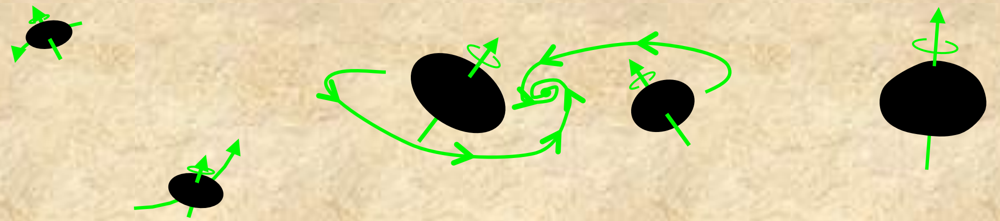


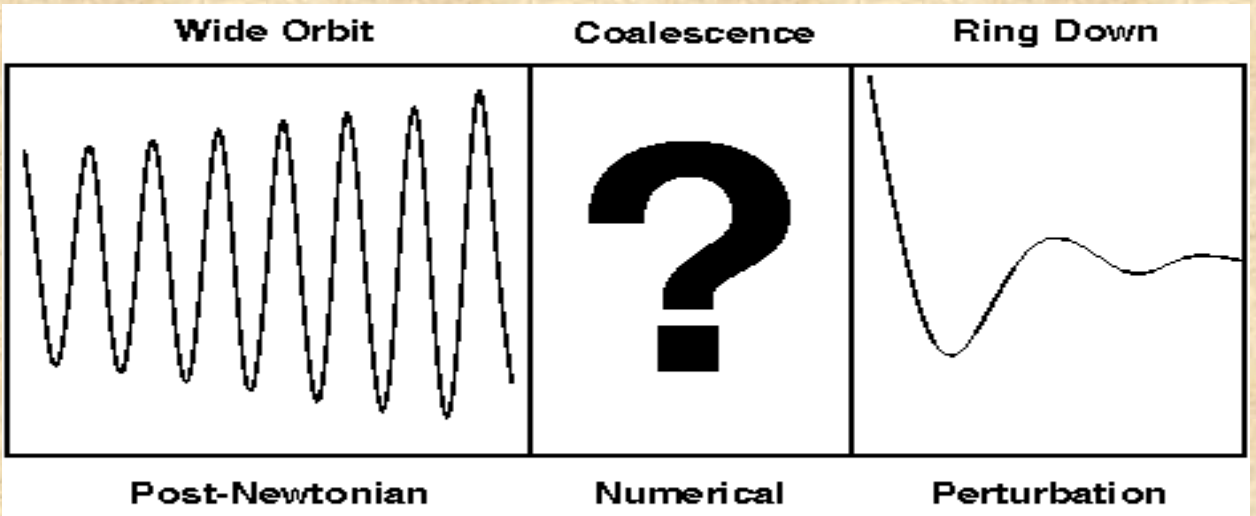
La razón por la que el problema ha resultado tan difícil de resolver es que de acuerdo a la relatividad, dos cuerpos en órbita emiten ondas gravitacionales. Debido a esto, el sistema pierde energía y la órbita decae, hasta que finalmente los objetos chocan.

Ondas gravitacionales producidas por agujeros negros en órbita

Dos objetos en órbita emiten ondas gravitacionales. Al perder energía, la órbita decae hasta que los objetos chocan.

La señal de ondas gravitacionales provenientes de la colisión de dos agujeros negros puede calcularse en las etapas inicial y final utilizando técnicas de aproximación (post-newtoniana en un caso, y perturbaciones en otro).





La colisión requiere la solución completa de las ecuaciones de Einstein.

Historia de la colisión de AN: Nos ha tomado 40 años!

1962
ADM

1964
Hahn+Lindquist

1975
Colisión de frente
Smarr + Eppley

1978
Maximal slicing,
minimal distortion
Smarr+York

1979
artículo
seminal de
York's

1984
Excision
(Unruh)

1989-1995
hyperbolicidad,
condiciones de lapso
(Bona+Masso)

1994
Cook: datos
iniciales

1994-1998
GRAND CHALLENGE

1994-1995
Excision, 1+log,
colisión de frente
(NCSA-WashU)

1997
Datos tipo puntura
Brandt-Bruegmann

1999
(since 1989)
BSSN

2000
Colisiones
de roce

2001
Lazarus
waveforms!

2002
Shifts
hiperbólicos

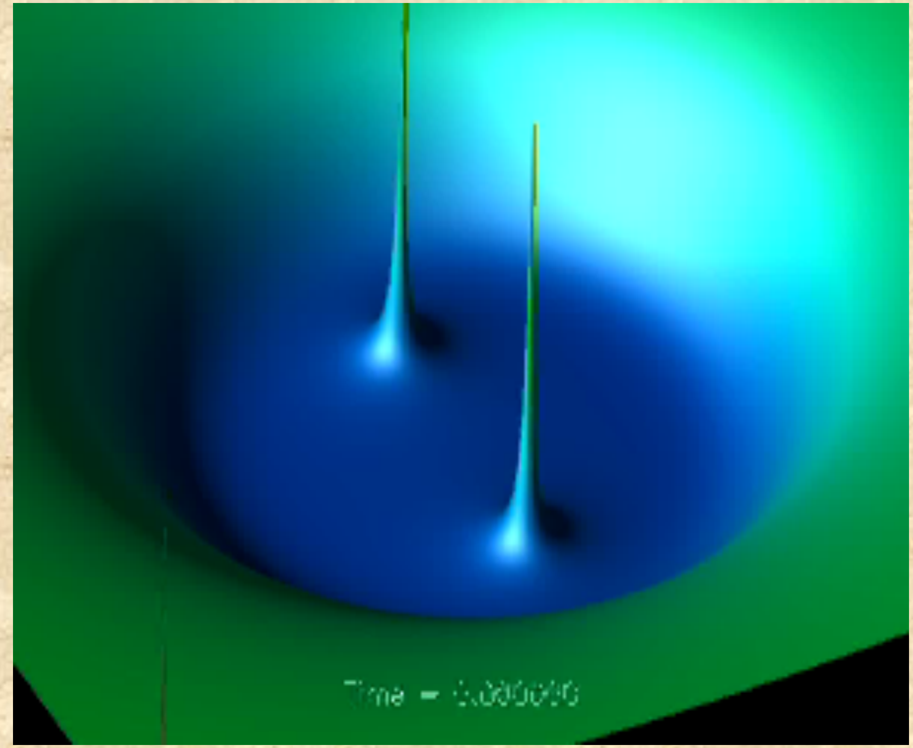
2002-2005
ISCO's
(co-rotación)

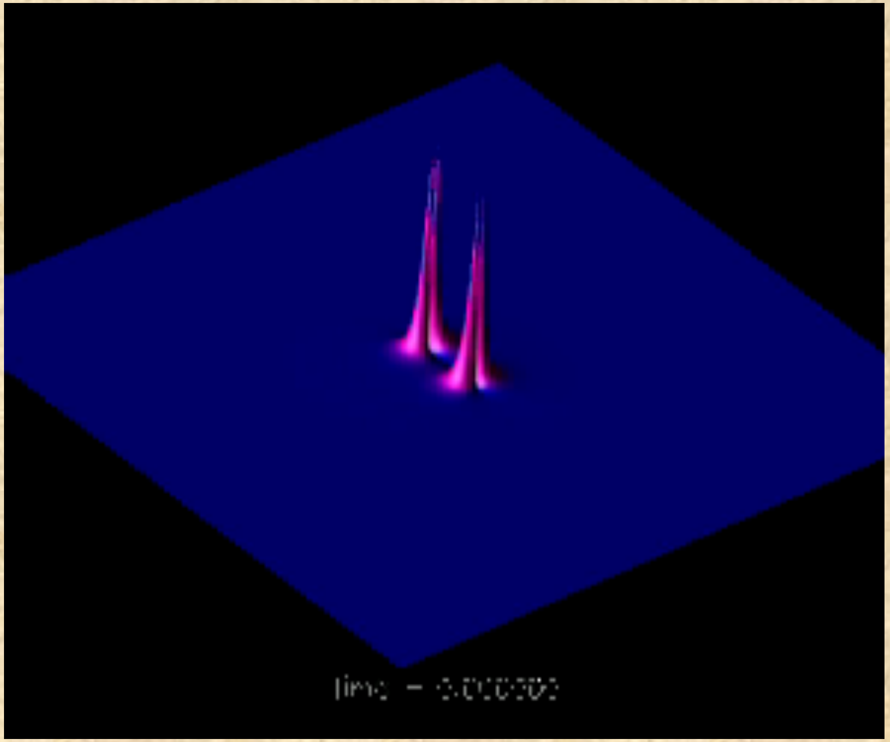
2003
Primera
órbita

2005
Orbitas!
Pretorius

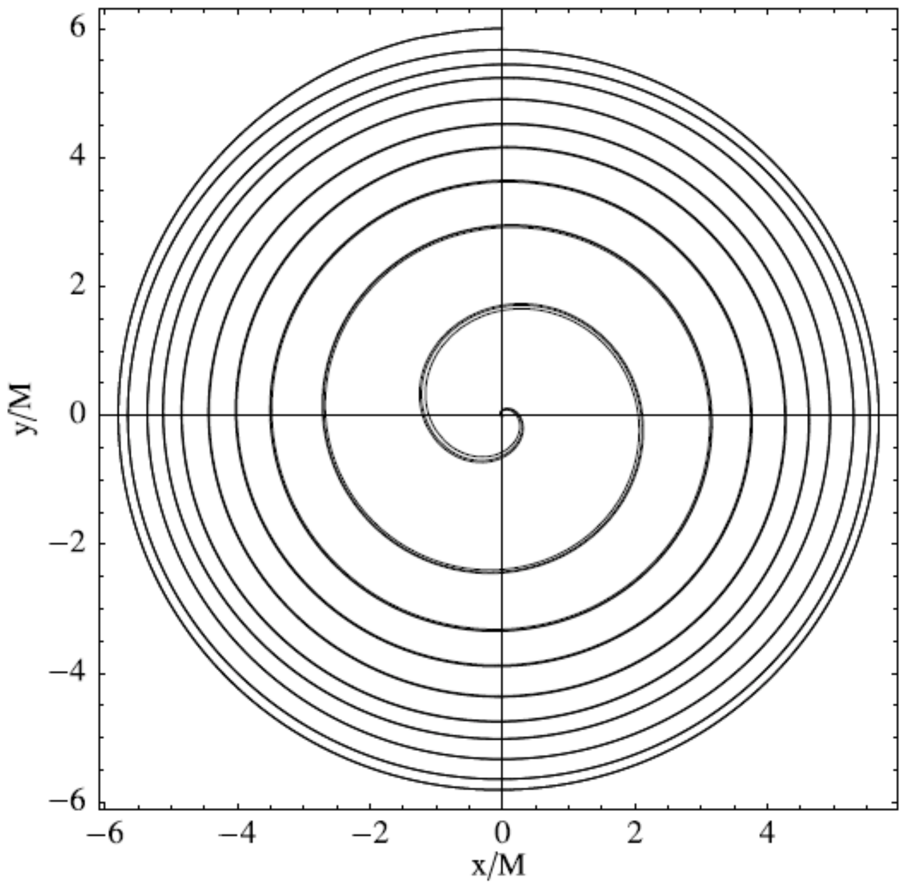
2005-2006
Órbitas
múltiples!

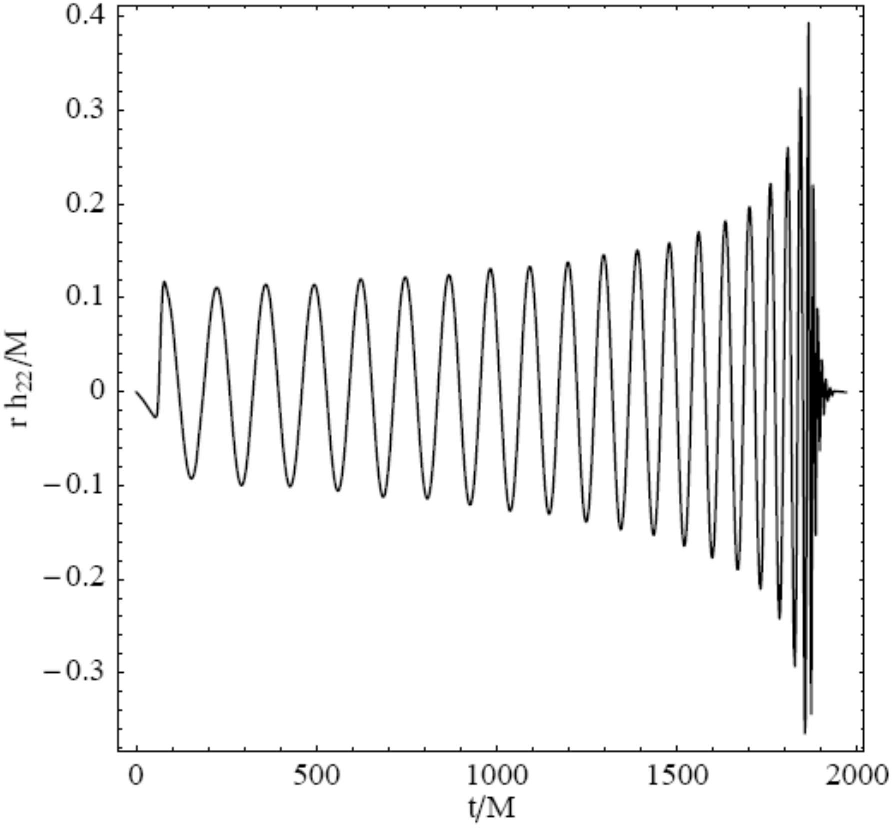
Colisión en espiral
(cortesía de M. Campanelli - UTB 2006)





Trayectorias y ondas en corrida típica





Trayectoria de singularidad (puntura)

Ondas gravitacionales

Ondas gravitacionales

Campo débil

Las ondas gravitacionales se pueden entender a partir de la aproximación de campo débil:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \ , \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \ .$$

En vacío, las ecuaciones de Einstein para campo débil se reducen a ecuaciones de onda:

$$\partial_\nu \bar{h}^{\nu\mu} = 0 \ , \qquad \Box \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu} \ ,$$

La solución son ondas transversales con dos polarizaciones:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp\left(i k_\alpha x^\alpha\right) \ , \qquad A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^+ & A^\times & 0 \\ 0 & A^\times & -A^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

Extracción de ondas gravitacionales

Para extraer las ondas gravitacionales de una simulación numérica se utilizan los escalares de Weyl. A partir de 4 vectores unitarios y normales en coordenadas esféricas se define una tétrada nula:

$$l^\mu := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^\mu_{(0)} + e^\mu_{(1)}\right) , \quad k^\mu := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^\mu_{(0)} - e^\mu_{(1)}\right) .$$

$$m^\mu := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^\mu_{(2)} + ie^\mu_{(3)}\right) , \quad \bar{m}^\mu := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^\mu_{(2)} - ie^\mu_{(3)}\right) .$$

Y se proyecta el tensor de Weyl sobre la tétrada para construir 5 escalares complejos:

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &:= C_{(1)(3)(1)(3)} = C_{\alpha\beta\mu\nu}\, l^\alpha m^\beta l^\mu m^\nu , \\
\Psi_1 &:= C_{(1)(2)(1)(3)} = C_{\alpha\beta\mu\nu}\, l^\alpha k^\beta l^\mu m^\nu , \\
\Psi_2 &:= C_{(1)(3)(4)(2)} = C_{\alpha\beta\mu\nu}\, l^\alpha m^\beta \bar{m}^\mu k^\nu , \\
\Psi_3 &:= C_{(1)(2)(4)(2)} = C_{\alpha\beta\mu\nu}\, l^\alpha k^\beta \bar{m}^\mu k^\nu , \\
\Psi_4 &:= C_{(2)(4)(2)(4)} = C_{\alpha\beta\mu\nu}\, k^\alpha \bar{m}^\beta k^\mu \bar{m}^\nu .
\end{aligned}$$

Energía y momento de las ondas

En la aproximación lineal, y para ondas radiales salientes:

$$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = 0 \,,$$
$$\Psi_4 = -\ddot{h}^+ + i\ddot{h}^\times = -\ddot{H} \,.$$

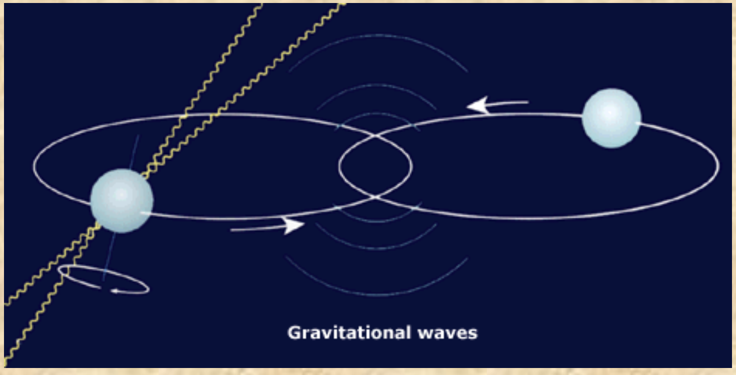
La energía y momento de las ondas se puede calcular como:

$$\frac{dE}{dt} = \lim_{r\to\infty} \frac{r^2}{16\pi} \oint |\dot{H}|^2 d\Omega = \lim_{r\to\infty} \frac{r^2}{16\pi} \oint \left| \int_{-\infty}^{t} \Psi_4 \, dt' \right|^2 d\Omega \,,$$

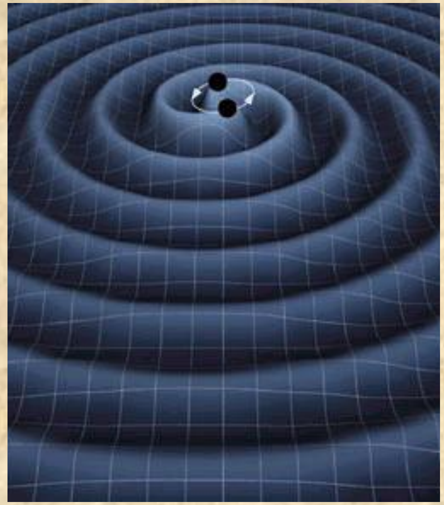
$$\frac{dP_i}{dt} = \lim_{r\to\infty} \frac{r^2}{16\pi} \oint l_i \, |\dot{H}|^2 d\Omega = \lim_{r\to\infty} \frac{r^2}{16\pi} \oint l_i \left| \int_{-\infty}^{t} \Psi_4 \, dt' \right|^2 d\Omega \,.$$

$$\frac{dJ_i}{dt} = - \lim_{r\to\infty} \frac{r^2}{16\pi} \mathrm{Re} \Bigg\{ \oint \left(\int_{-\infty}^{t} \bar{\Psi}_4 \, dt' \right) \times \hat{J}_i \left(\int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{t'} \Psi_4 \, dt'' dt' \right) d\Omega \Bigg\} \,.$$

Emisión de ondas gravitacionales



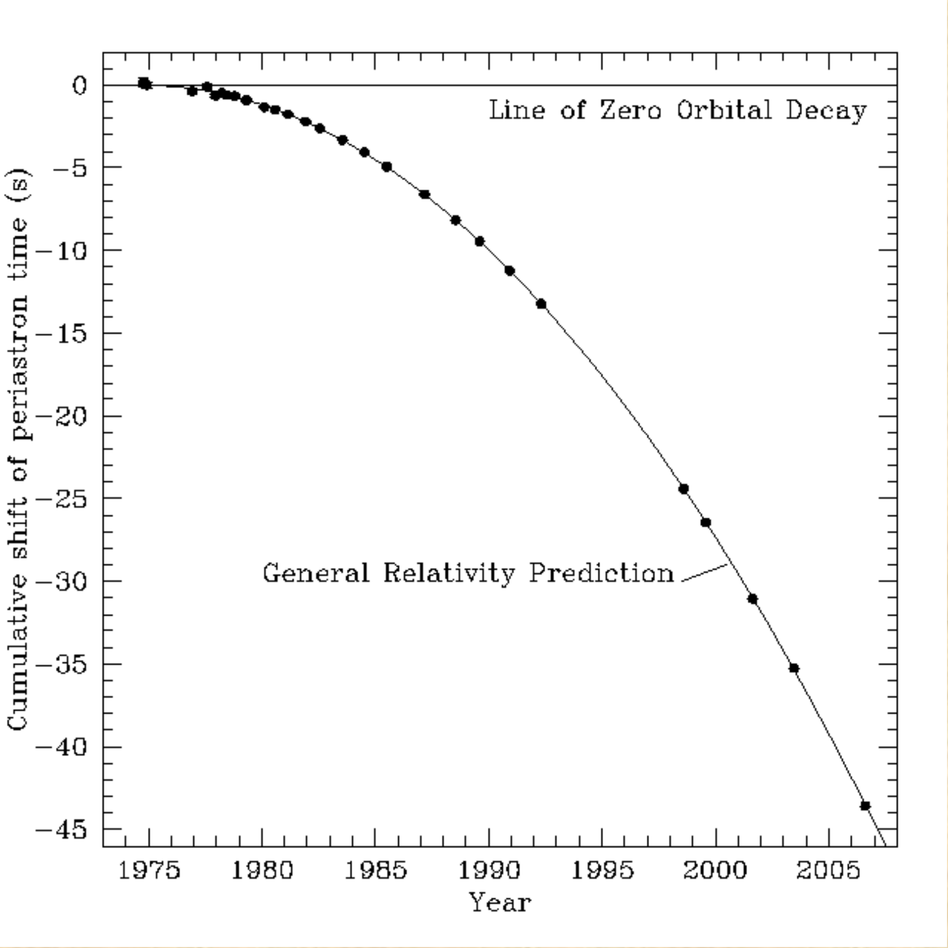
En relatividad general objetos acelerados emiten ondas gravitacionales.



Las ondas emitidas se llevan energía del sistema, por lo que la órbita decae lentamente.

Pero se requieren masas enormes en órbitas muy cercanas y moviéndose a velocidades muy altas para que el efecto se note.

Evidencia indirecta de ondas gravitacionales: El pulsar binario

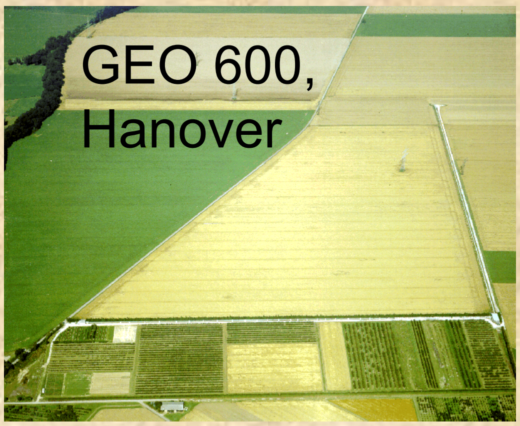


En 1974 se descubrió el primer “pulsar binario” (PSR 1913+16): dos estrellas de neutrones en órbita una alrededor de la otra.

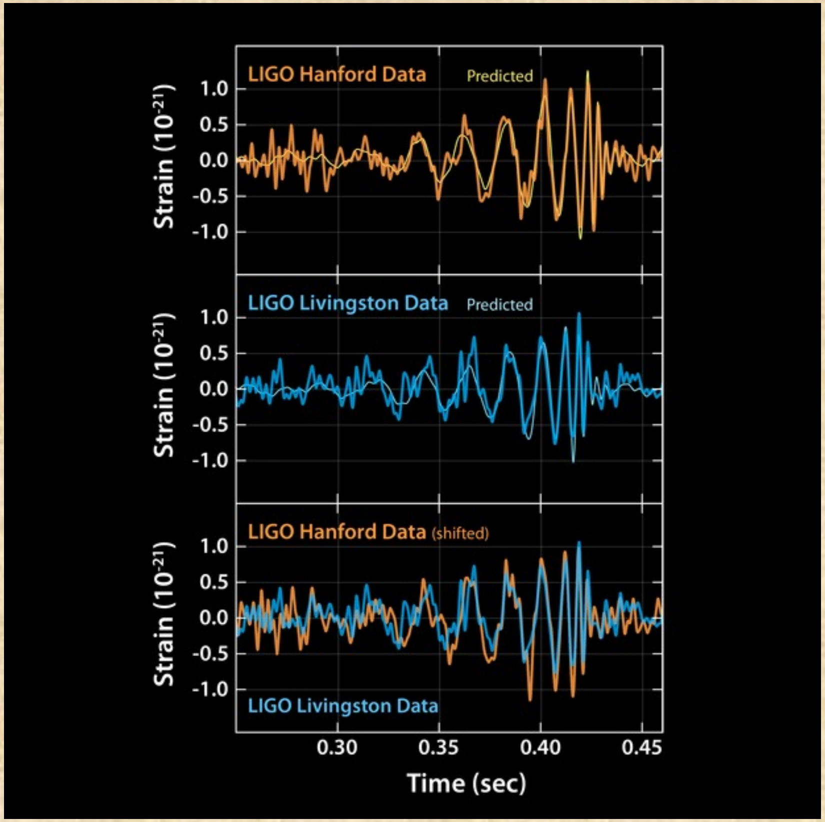
El decaimiento de la órbita se ha comparado con la predicción de relatividad general y coinciden de manera espectacular!

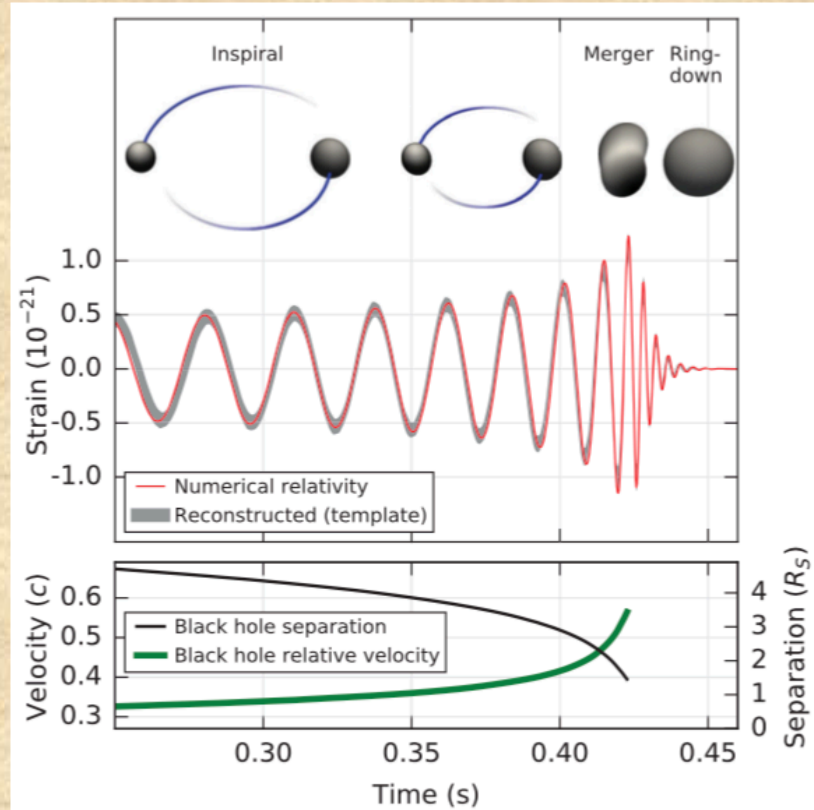
Premio Nobel de física 1993, R. Hulse y J. Taylor.

Observatorios de ondas gravitacionales



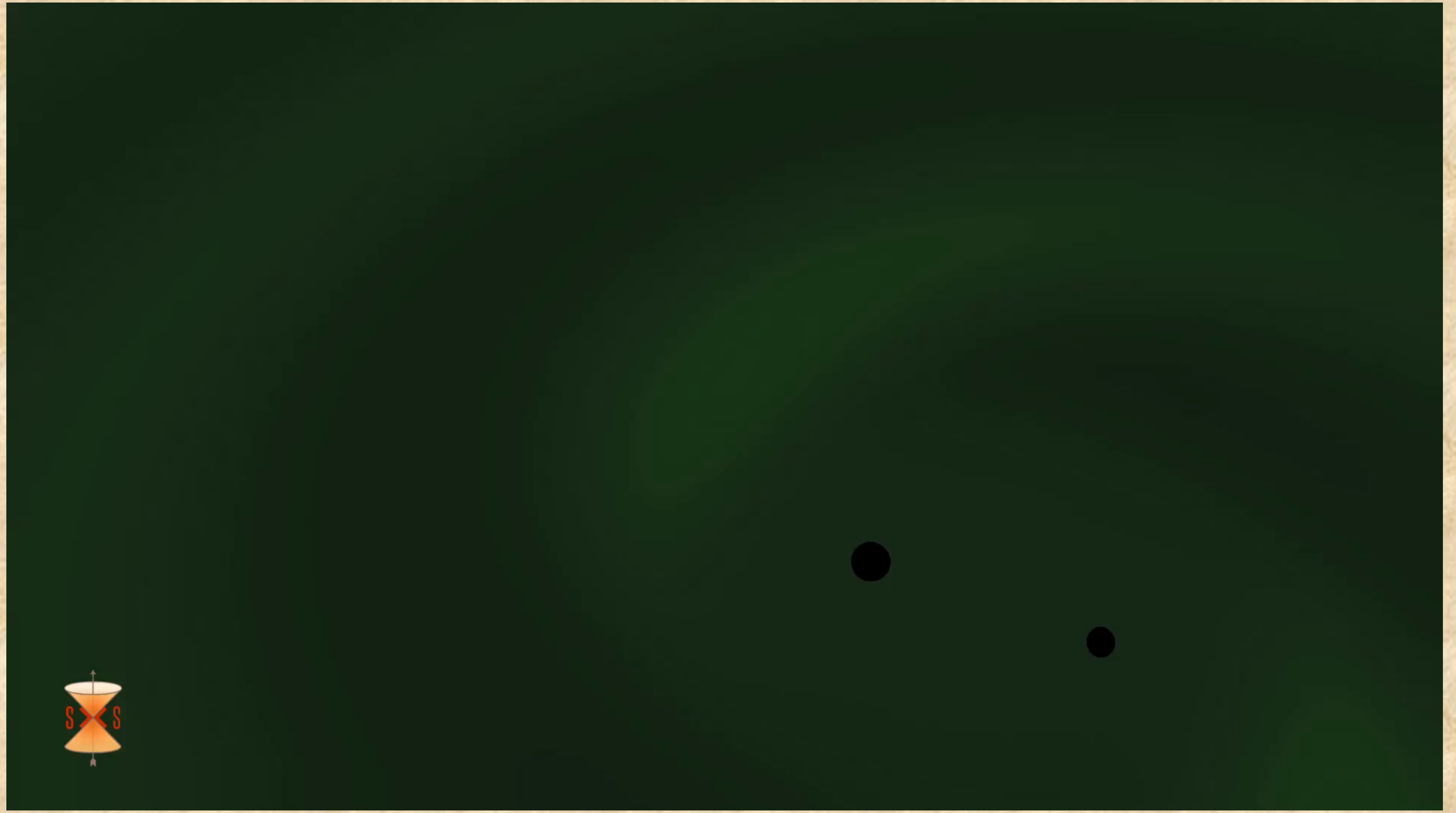
Detección: 14 septiembre 2015 (anuncio 11 de febrero de 2016)





Colisión de dos agujeros negros de 29 y 36 masas solares respectivamente. Agujero negro final de 62 masas solares. Distancia 1,300 millones de años luz (400 Mega parsecs).

Simulación de la colisión



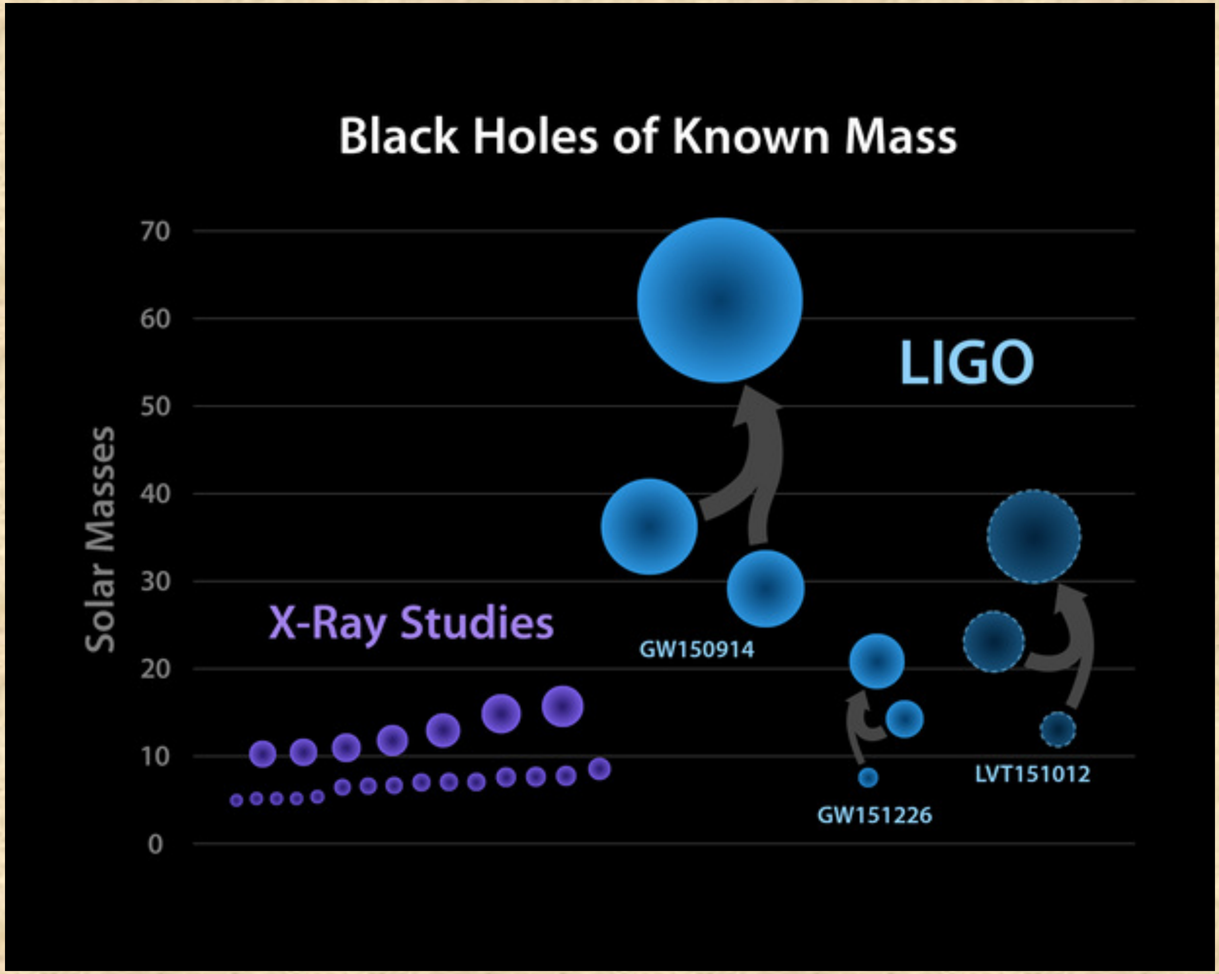
Segundo evento: GW151226

En junio de 2016 la colaboración LIGO anunció una segunda detección robusta de la colisión de dos agujeros negros.

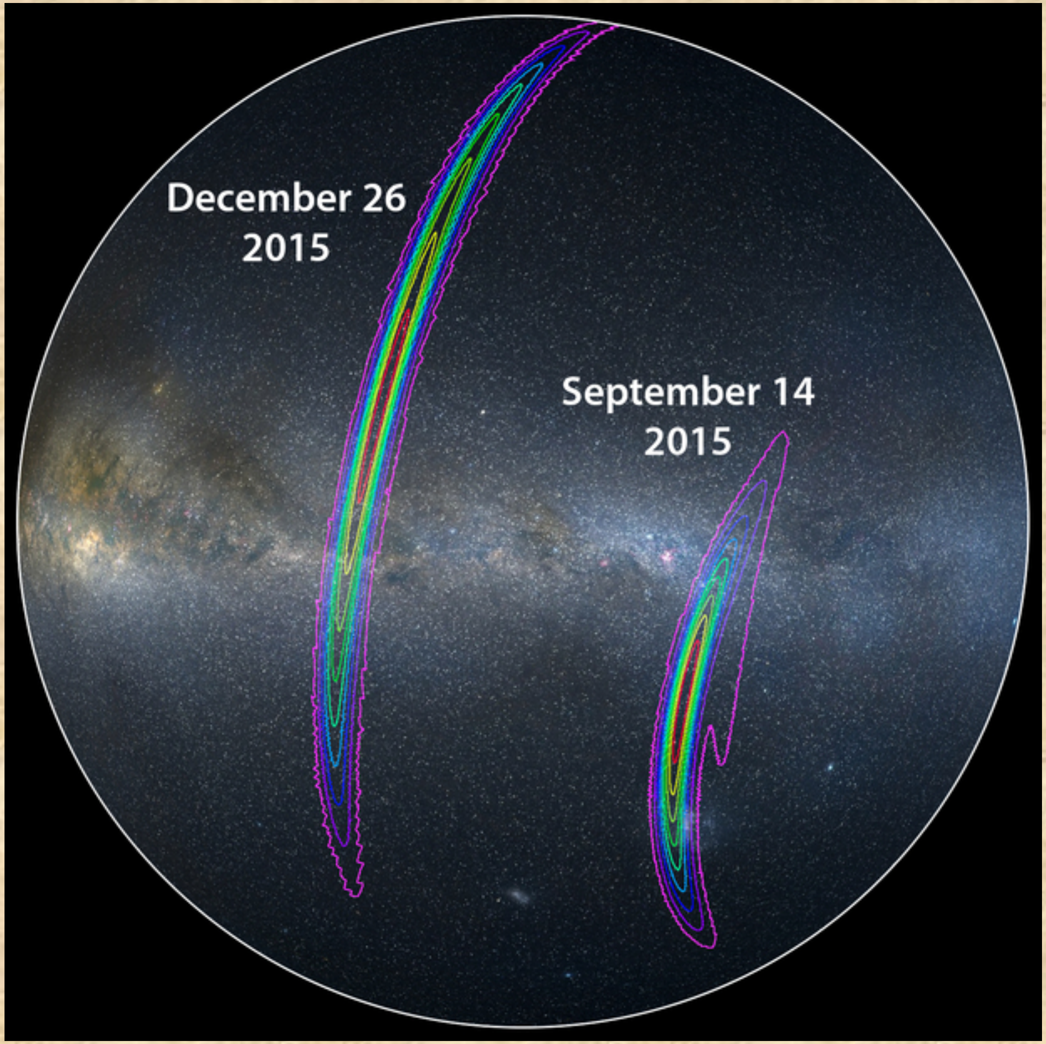
Esta detección ocurrió el 26 de diciembre de 2015, y corresponde a la colisión de dos agujeros negros de 14 y 8 masas solares, produciendo un agujero negro final de 21 masas solares.

La señal era mas débil, pero al ser de frecuencia mas alta fue posible detectarla por mas tiempo (alrededor de 1 segundo, unas 27 órbitas).

Masas de agujeros negros



Localización en el cielo



¡Gracias!