Loop Quantum Gravity Black Holes

Rodolfo Gambini

Con Jorge Pullin, Miguel Campiglia, Javier Olmedo, Esteban Mato y Nahuel Barrios

1) **Agujeros Negros cuánticos**

Problemas abiertos en la fisica de agujeros negros

Introduccion a la gravedad cuantica

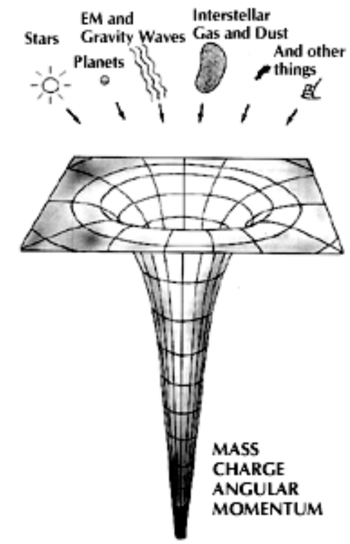
Gravedad cuantica de lazos

Cuantizacion de espacios con simetria esferica: Schwarzschild Black Hole

The physical Hilbert space
Quantum observables
The metric quantum operator
Absence of singularities
Semi-classical solutions

2) Aplicaciones

Problemas abiertos de la física de Agujeros Negros



Singularidades

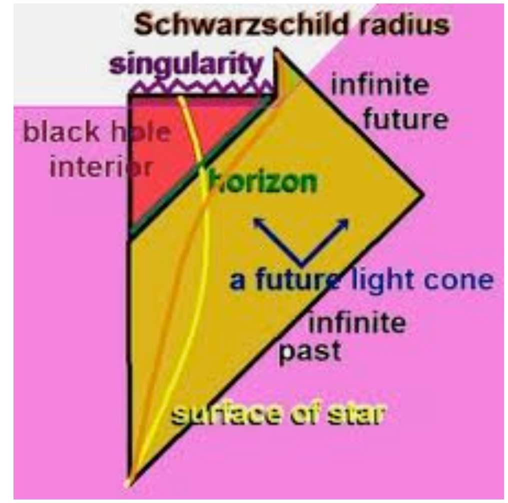
En el interior de un agujero negro de acuerdo con la relatividad general existe una singularidad gravitacional. Una región donde la curvatura se hace infinita.

El desarrollo de singularidades o la existencia de variables que toman valores infinitos suele indicar que estamos llevando la teoría más alla de su rango de validez.

En este caso, es de esperar que efectos cuánticos entren en juego ya que hay diversas variables que sobrepasan la escala Planck.

Se espera que la gravedad cuántica permita eliminar estos infinitos.

Evaporación



En 1974, Hawking mostró que los agujeros negros emiten radiación térmica

Un Black Hole en el vacío se evapora perdiendo masa via la emisión de partículas.

La radiación emitida es tipo cuerpo negro y no lleva informacion que permita reconstruir la información contenida en la materia que lo formó. Aparentemente la información se pierde en el proceso de radiación.

Existe desde hace décadas una fuerte polémica entre los físicos teóricos acerca de lo que ocurre con la información supuestamente perdida.

En mecánica cuántica, no es posible que se pierda información ya que ello implicaría que la evolución no ha sido unitaria.

Nuevamente para entender este asunto completamente se debe tratar cuanticamente al agujero negro.

Introduction to Quantum Gravity

The *Lagrangian of General Relativity* is

$$L = {}^4R\sqrt{{}^4g} \qquad ds^2 = h_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt) - (N dt)^2$$

$$L = -h_{ij}\partial_t \pi^{ij} - NH - N_i C^i$$

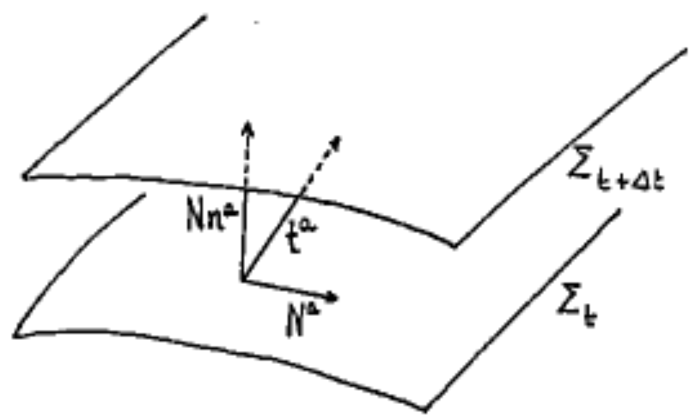
where the constraints are given by

$$H(\vec{x}) \equiv -\sqrt{h}\left[R + h^{-1}\left(\frac{\pi^2}{2} - \pi^{ij}\pi_{ij}\right)\right] = 0$$ Hamiltonian constraint

$$C^i(\vec{x}) \equiv -2\pi^{ij}_{;j} = 0$$ Diffeomorphism constraint

The total hamiltonian is

$$H_T = \int dx\,(N(\vec{x})H(\vec{x}) - N_i(\vec{x})C^i(\vec{x}))$$



Dirac quantization of the gravitational field

1) The first step is the definition of an auxiliary Hilbert space

$$\psi(h_{ij}) \in H_{aux} \qquad H(\hat{h}_{ij}, \hat{\pi}^{ij}) \qquad C_a(\hat{h}_{ij}, \hat{\pi}^{ij})$$

$$\hat{\pi}^{ij}\psi = i\frac{\delta}{\delta h_{ij}}\psi$$

2) The physical space of states is defined by the space of solutions of the constraint equations

$$H(\hat{h}_{ij}, \hat{\pi}^{ij})\psi_{phys}(h) = 0 \qquad C_a(\hat{h}_{ij}, \hat{\pi}^{ij})\psi_{phys}(h) = 0$$

$$\psi_{phys}(h) \in H_{phys}$$

3) The operators defined on H_{phys} are called Dirac observables. They must satisfy

$$[H(\hat{h}_{ij}, \hat{\pi}^{ij}), \hat{Q}] = 0 \qquad [C_a(\hat{h}_{ij}, \hat{\pi}^{ij}), \hat{Q}] = 0 \text{ in } H_{phys}$$

.

and therefore $\hat{Q}\,|\psi>_{phys} \in H_{phys}$

Consistency conditions.

$$[H(\vec{x}),H(\vec{y})]|\psi>_{phys}=0 \qquad [H,C_i]|\psi>_{phys}=0 \qquad [C_i,C_j]|\psi>_{phys}=0$$

Anomalies.

$$[\hat{H}(x),\hat{H}(y)] = i\hbar f_{xy}(h_{hk})^i \hat{C}_i + \hbar^2 \hat{D}(x,y)$$

Las anomalías conducen a inconsistencias. Se trata de encontrar realizaciones de los vínculos sin anomalías. La dificultad es grande porque los vínculos gravitacionales no forman un algebra de Lie.

Loop quantum gravity is based on a new set of variables.

(Real) Ashtekar -Yang Mills- variables:

$$A_i^B = \Gamma_i^B + \gamma \ K_i^B$$

E_B^i are elements of the su(2) algebra

$$\eta^{AB} E_A^i E_B^j = \det(g) g^{ij}$$

$$\{A_i^B(x), E_C^j(y)\} = \delta_C^B \delta_i^j \delta(x-y)$$

The constraints.

Gauss: $G_A = D_i E_A^i = 0$

Difeomorphism: $V_j = E_A^i F_{ij}^A$

Hamiltonian: $H(A,E,\gamma)$

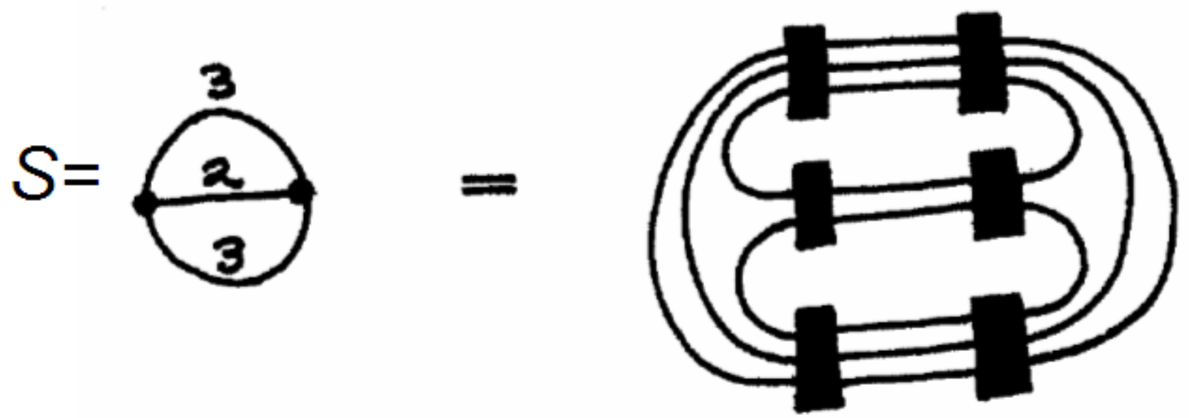
The original complex Ashtekar variables correspond to γ = i

Toda la informacion contenida en los campos gauge se puede codificar en las trazas de las holonomias: los Wilson Loops.

$$U(A,\gamma) = \mathcal{P} \exp \int_\gamma A,$$

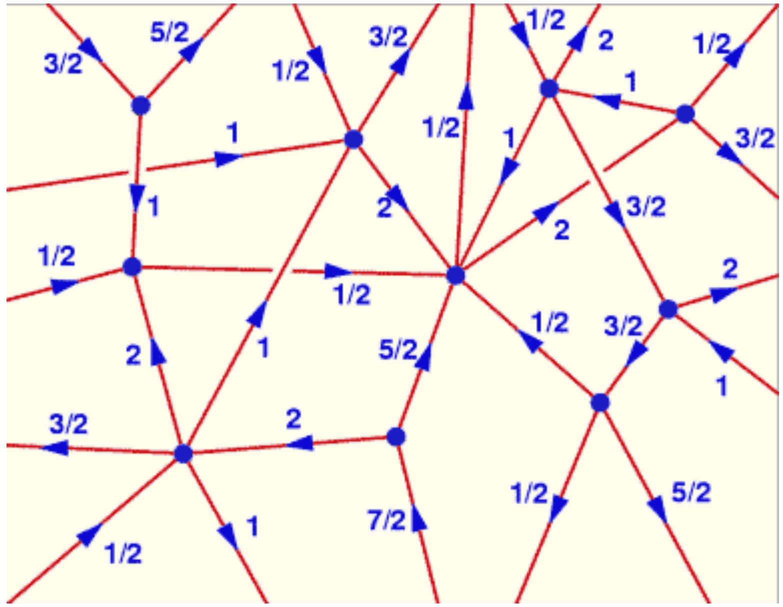
Es posible cuantizar los campos de gauge en un espacio de funciones de onda que dependen de camino cerrado γ R.G. y A. Trias Nucl.Phys. B (1986).

The loop basis is highly overcomplete, it is possible to introduce an alternative basis of gauge invariant elements that may be called Wilson spin networks.



Para la teoría gauge de la relatividad general los spin networks tienen información geométrica acerca de la estructura microscópica del espacio. Este esta compuesto por ladrillos elementales.

Six of the seven Ashtekar constraints may be simply solved with spin knots.



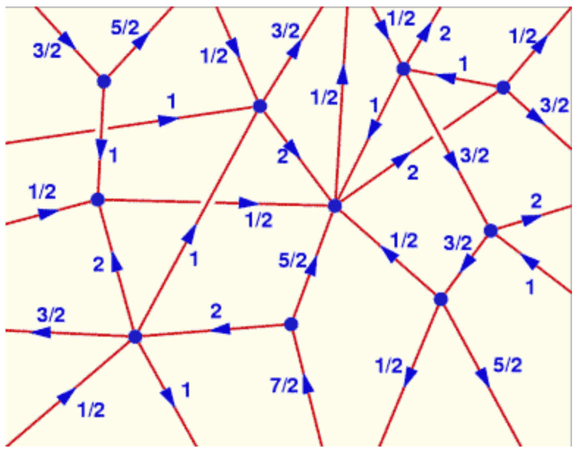
$$U(A,\gamma) = \mathcal{P}\exp\int_\gamma A, \qquad R^{(j)\alpha}{}_\beta(U) = \langle U|j,\alpha,\beta\rangle.$$

$$\Psi_{\mathrm{S}}[A] = \langle A|\mathrm{S}\rangle \equiv \left(\bigotimes_l R^{(j_l)}(H[A,\gamma_l])\right)\cdot\left(\bigotimes_n i_n\right).$$

En el espacio de redes de spin no estan definidas las conexiones solo las holonomias y las triadas lo estan

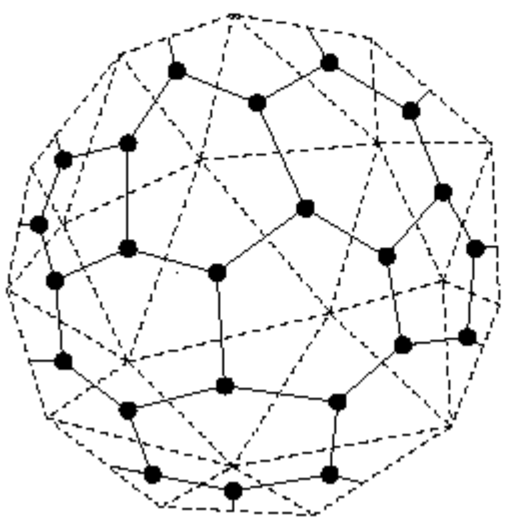
Se puede probar que existe un único producto interno entre spin networks que es compatible con la invariancia bajo difeomorfismos. Cada red de spines define una geometría espacial tridimensional cuantica.

$S =$



$$Area(\Sigma) = \sqrt{j(j+1)}(l_{Planck})^2$$

$$Vol(R_v) = A(j_1, j_2, j_3, j_4)(l_{Planck})^3$$



As an example I show a simple 2-dimensional spin network and the corresponding geometry

La definicion del vinculo Hamiltonian en el caso general es aún un problema abierto.

Cuantización del Schwarzschild Black Hole.

Durante los últimos 30 años se hicieron múltiples intentos de cuantizar canónicamente este sistema.

Si uno cuantiza la relatividad general imponiendo simetría esférica uno termina con una formulación con tres clases de vínculos: un vinculo de Gauss, uno de difeomorfismos y uno hamiltoniano por cada valor de la coordenada radial

Sin embargo como ocurre con la teoría completa los vínculos no satisfacen un algebra de Lie y en el espacio de lazos presentan anomalías cuánticas.

Even though at the classical level

$$[H(x),H(y)]_{PB} = f_{xy}(h_{hk})C(x)$$

Quantum mechanically

$$[H(x),H(y)] \neq f_{xy}(h_{hk})\ \ C(x)$$

Hace pocos años pudimos probar que se pueden redefinir los vinculos de modo de tener un álgebra consistente

Spherically symmetric Ashtekar variables.
Two canonical pairs:

$$E^{\varphi}(x,t); E^{x}(x,t); A_{\varphi}(x,t) = K_{\varphi}(x,t), K_{x}(x,t)$$

$$g_{xx} = \frac{(E^{\varphi})^2}{|E^x|}, \qquad g_{\theta\theta} = |E^x|,$$

$$K_{xx} = -\text{sign}(E^x)\frac{(E^{\varphi})^2}{\sqrt{|E^x|}}\,\mathrm{K_x} \qquad K_{\theta\theta} = -\sqrt{|E^x|}\frac{A_{\varphi}}{2}$$

$$H_T = N[-\frac{E^{\varphi}}{2\sqrt{E^x}} - 2K_{\varphi}\sqrt{E^x}K_x - \frac{E^{\varphi}K_{\varphi}^2}{2\sqrt{E^x}} + \frac{(E^{x}{}')^2}{8\sqrt{E^x}E^{\varphi}}$$
$$-\frac{\sqrt{E^x}E^{x}{}'E^{\varphi}{}'}{2(E^{\varphi})^2} + \frac{\sqrt{E^x}E^{x}{}''}{2E^{\varphi}}] + N_x[E^{\varphi}K_{\varphi}{}' - E^{x}{}'K_x] = NH + N_xC_x$$

$$N_x{}^{\text{old}} = N_x{}^{\text{new}} - 2N^{\text{old}}\frac{K_{\varphi}\sqrt{E^x}}{E^{x}{}'} \qquad N^{\text{old}} = \frac{N^{\text{new}}E^{x}{}'}{E^{\varphi}}$$

After this redefinition the total Hamiltonian takes the form:

$$H_T = \int dx N'(-\sqrt{E^x}(1+K_\varphi^2) + \frac{(E^x{}')^2\sqrt{E^x}}{4(E^\varphi)^2} + 2GM)$$

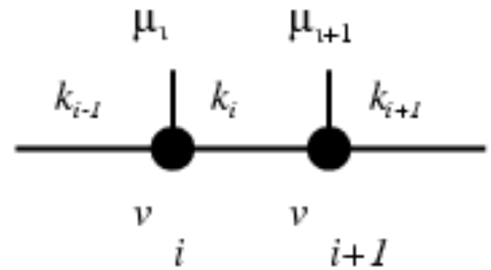
$$N_x[E^\varphi K_\varphi{}' - E^x{}' K_x]$$

Where M is the black hole mass and appears from a boundary term in the Hamiltonian that we omitted in the previous expressions. These constraints satisfy the algebra.

[D,D]=D, [D,H]=H, [H,H]=0

The spin networks are in the spherically symmetric case are one-dimensional along the radial direction.

$$T_{g,\vec{k},\vec{\mu}}(K_x, K_\varphi) = \langle K_x, K_\varphi \Big|$$



$$\Big\rangle$$

$$= \prod_{e_j \in g} \exp\left(\frac{i}{2} k_j \int_{e_j} K_x(x) dx\right) \prod_{v_j \in g} \exp\left(\frac{i}{2} \mu_j \gamma K_\varphi(v_j)\right)$$

$$\hat{E}^x(x) T_{g,\vec{k},\vec{\mu}}(K_x, K_\varphi) = \ell^2_{\text{Planck}} k_i(x) T_{g,\vec{k},\vec{\mu}}(K_x, K_\varphi),$$
$$\hat{E}^\varphi(x) T_{g,\vec{k},\vec{\mu}}(K_x, K_\varphi) = \ell^2_{\text{Planck}} \sum_{v_i \in g} \delta(x - x(v_i)) \mu_i T_{g,\vec{k},\vec{\mu}}(K_x, K_\varphi),$$

k_j enteros μ_j reales

Recall that E^x represents the radial coordinate and E^φ determines de g_{xx} component of the metric . We assume that E^x is a monotonus function in order to have a well defined radial coordinate

$\vec{k} \equiv \{k_0, k_1, ... k_V\}$ with $k_0 < k_1 ... < k_V$

The elements of the physical space of states are solutions of the constraints.

$$H\Psi(K_x,K_\varphi) = (-\sqrt{E^x}(1+\frac{\sin(\rho K_\varphi)^2}{\rho^2}) + \frac{(E^{x\prime})^2\sqrt{E^x}}{4(E^\varphi)^2} + 2GM)\Psi(K_x,K_\varphi) = 0$$

$$\Psi\left(K_\varphi, K_x, g, \vec{k}\right) = \Psi(M)\exp\left(f\left(K_\varphi, g, \vec{k}\right)\right)\Pi_{e_j\in g}\exp\left(\frac{i}{2}k_j\int_{e_j}K_x(x)dx\right),$$

Where f is a Jacobi elliptic function.

The diffeomorphism constraint is solved by a technique known as group averaging.

$$| M_0, \tilde{g}, \vec{k} >_{phys}$$

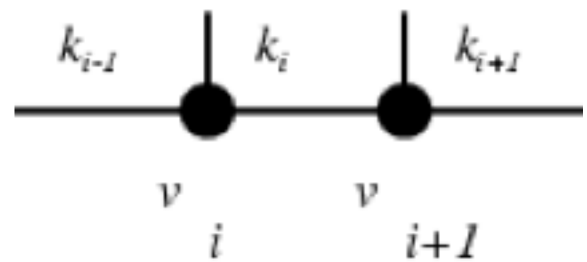
Is a basis of the physical space of states labaled by the observables of the quantum theory.

Además de la masa *M* que es un observable cuantico el modelo admite observables sin análogo clásico.

Ella son el número de vertices V y un observable no trivial dado por *O(z)* con z en [0,1].

$$\hat{O}(z)|\vec{k},\tilde{g}\rangle_{\rm phys} = \ell^2_{\rm Planck} k_{{\rm Int}(V z)}|\vec{k},\tilde{g}\rangle_{\rm phys},$$

$$A_i = 4\pi l^2_{Planck} k_i$$



The components of $\vec{k}$ are non vanishing integers.

Parameterized observables

$$\hat{E}^x(x)|\vec{k},\tilde{g}\rangle_{\rm phys} = \hat{O}(z(x))|\vec{k},\tilde{g}\rangle_{\rm phys}.$$

La función *z(x)* caracteriza la coordenada radial utilizada

Para caracterizar la geometría cuántica definida en este espacio físico de estados, definimos operadores asociados a la métrica en un sistema de coordenadas. Para identificar el sistema de coordenadas se usan dos funciones: z(x) que define la coordenada radial utilizada y $K_\varphi(x)$ que define la foliación de tres superficies considerada.

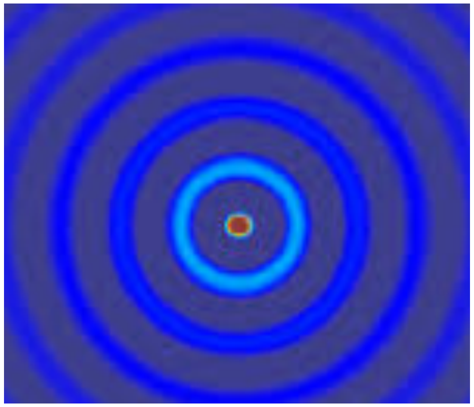
Por ejemplo, la componente

$$g_{tx} = g_{xx} N_r = -\frac{(E^x)' K_\varphi}{2\sqrt{E^x}\sqrt{1 + K_\varphi^2 - \frac{2GM}{\sqrt{E^x}}}},$$

Esta dada en terminos de los observables *O* y M

y de las funciones $z(x)$ $E^x(x) = O(z(x))$ y $K_\varphi(x)$

El espacio de Hilbert físico esta bien definido para valores arbitrarios de los observables $k_1 \ldots k_V$ diferentes de cero lo que asegura que la teoría cuántica no presenta singularidades.



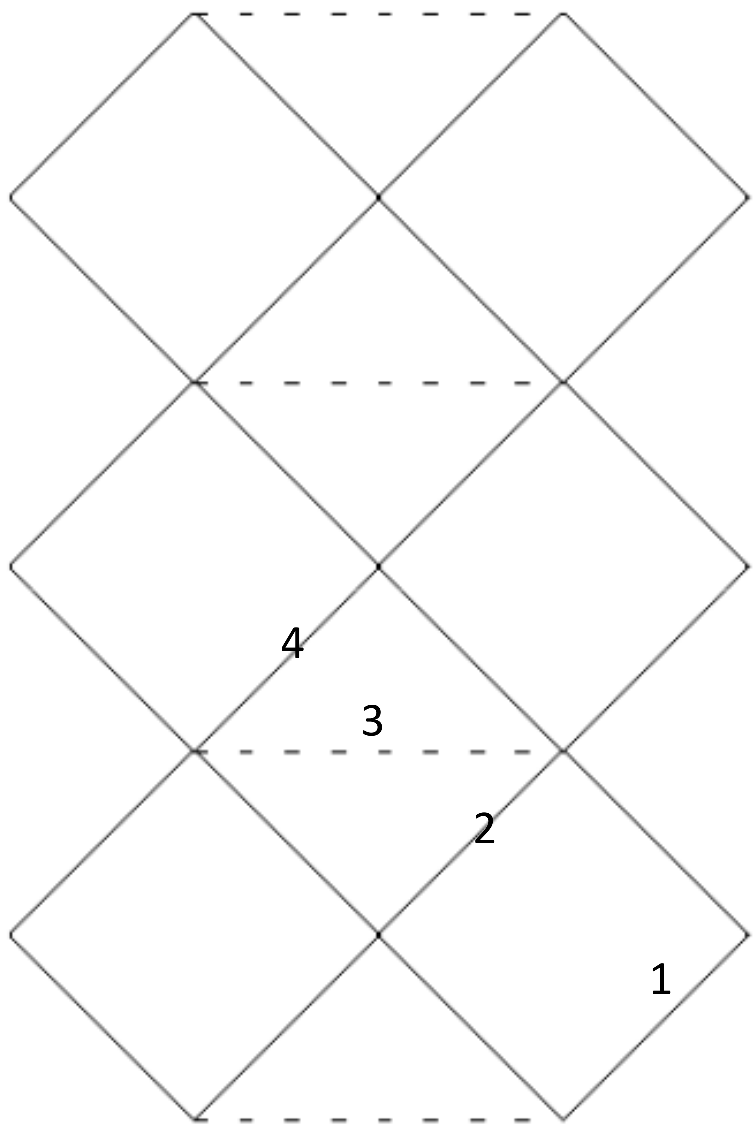
The quantization gives rise to a description given in terms of spheres of symmetry with quantized radiuses.

$$R_i^2 = l_{Planck}^2 k_i \qquad k_1 < k_2 < \ldots < k_V$$

$$|\psi>_{phys} = \sum_{\vec{k},M} C(\vec{k},M)\,|\vec{k},M>$$

Los estados semiclásicos se obtienen considerando estados picudos en la masa y con pasos pequeños cuando se pasa de k_i a k_{i+1}.

La geometría resultante es distribucional. La métrica tiene soporte en los vértices del spin network. Uno aproximaría una función regular con deltas de Dirac en los vértices.



Portales a otras regiones del espacio-tiempo

La descripción cuantica puede extenderse
más allá de la región que contendría la singularidad
en la teoría clásica hacia valores negativos de la
coordenada x.

Para ello extendemos el dominio del
observable *O(z)*

$$O(z) \text{ to } z \in [-1,1] \text{ and its eigenvalues } \vec{k}$$

A particle falling into the BH would emerge
in other region of the space time

R.G and J. Pullin Phys. Rev. Lett. May 23 2013
http://physics.aps.org/

Este escenario resulta de una cuantización altamente idealizada: un agujero negro eterno con simetria esférica congelada.

Otros desarrollos

- Reissner-Nordstrom
- Materia en backgrounds cuánticos
- Hawking radiation.
- Sistemas cuánticos colapsantes.
- Renormalización del tensor de energía momentum
- El futuro: perturbaciones, conformal LQG.

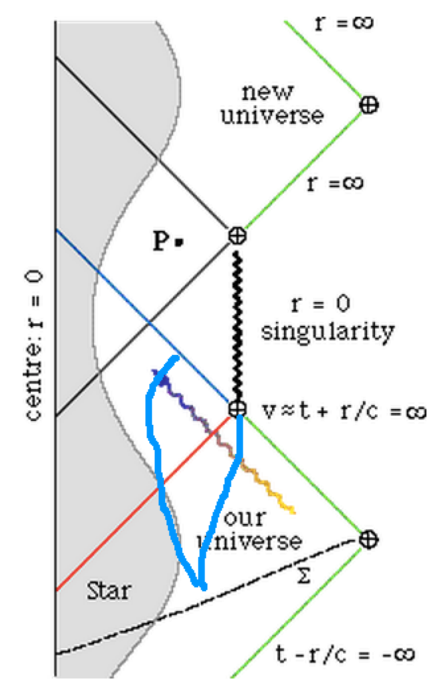
Generalization to Reissner-Nordstrom:

R. G, J. Pullin, E Mato **Phys.Rev. D91 (2015) no.8, 084006**
arXiv: 1412:6055

Los resultados obtenidos para Schwarzschild pueden extenderse al caso de agujeros negros cargados de Reissner-Nordstrom. Como en la caso sin carga el vínculo Hamiltoniano puede abelianizarse con las mismas técnicas. Se puede ver que el espacio físico coincide con el del caso sin carga y que nuevamente la geometría se describe en términos de esferas de simetría cuantizadas.

La métrica puede representarse como en el caso no cargado usando Observables de Dirac parametrizados y la singularidad se elimina.

El tratamiento cuántico ofrece nuevas perspectivas sobre el problema de la potencial inestabilidad de R.N. debido a la creación de singularidades cuando hay materia presente en el horizonte de Cauchy.



Background picture from Droz, Morsink, Israel.

Campos materiales en espacio-tiempos cuánticos

Para estudiar radiación de Hawking hay que introducir campos materiales sobre el background definido por el agujero negro cuántico. El cambio principal respecto al caso de un background clásico es que ahora los campos se propagan en un lattice discreto definido por los números cuánticos de la red de spines del agujero negro.

$$\hat{H}_i = \hat{A}_i P^2_{\phi,i} + \hat{B}_i \left(\phi_{i+1} - \phi_i\right)^2 + \hat{C}_i P_{\phi,i} \left(\phi_{i+1} - \phi_i\right)$$

For states with equally spaced nodes and $z(x)=x/x_{max}$,

$$\begin{aligned}
\hat{A}_i|\psi,\tilde{g},\vec{k}\rangle_{\rm grav} &= \frac{1}{2}\frac{\left[\sqrt{|\Delta k_i+1|}-\sqrt{|\Delta k_i-1|}\right]^2}{\ell^2_{\rm Planck}}\frac{\left(1+\mathcal{K}^2_{\varphi,i}-\frac{2GM}{\sqrt{\ell^2_{\rm Planck}k_i}}\right)}{\sqrt{\ell^2_{\rm Planck}k_i}}|\psi,\tilde{g},\vec{k}\rangle_{\rm grav},\\
\hat{B}_i|\psi,\tilde{g},\vec{k}\rangle_{\rm grav} &= 2\frac{\left[\sqrt{|\Delta k_i+1|}-\sqrt{|\Delta k_i-1|}\right]^2}{\ell^2_{\rm Planck}}\left(1+\mathcal{K}^2_{\varphi,i}-\frac{2GM}{\sqrt{\ell^2_{\rm Planck}k_i}}\right)k_i^{3/2}\ell^3_{\rm Planck}|\psi,\tilde{g},\vec{k}\rangle_{\rm grav},\\
\hat{C}_i|\psi,\tilde{g},\vec{k}\rangle_{\rm grav} &= 2\frac{\left[\sqrt{|\Delta k_i+1|}-\sqrt{|\Delta k_i-1|}\right]^2}{\ell^2_{\rm Planck}}\sqrt{1+\mathcal{K}^2_{\varphi,i}-\frac{2GM}{\sqrt{\ell^2_{\rm Planck}k_i}}}\mathcal{K}_{\varphi,i}\sqrt{\ell^2_{\rm Planck}k_i}|\psi,\tilde{g},\vec{k}\rangle_{\rm grav}.
\end{aligned}$$

Las ecuaciones discretas resultantes para el campo escalar aproximan muy bien las ecuaciones del continuo para energías menores que la energía Planck, y el análisis es muy similar al del continuo.

En particular, uno puede determinar los modos de oscilación y determinar en términos de esos modos los operadores de creación y aniquilación, lo que permite determinar el estado del vacío.
En espacio-tiempos curvos hay mas de un vacío, en el caso del BH
se pueden determinar los vacíos de Boulware, Hartle-Hawking, y Unruh de la teoría con background cuántico. Ellos se parecen a los del continuo con correcciones pequeñas

El principal cambio es que los modos trans-plankianos que aparecen cerca del horizonte son suprimidos debido a que tendrían longitudes de onda menores al espaciado entre esferas de simetría, lo que conduce a un tensor de energía cantidad de movimiento finito. Cosa que no ocurre cuando se cuantizan campos sobre un background clásico.
También se recupera la forma usual de la radiación de Hawking con una pequeña corrección dependiente del espaciado.

R. G, J. Pullin CQG 31, 115003 (2014) arXiv: 1312.3595

$$\langle \mathrm{in}|N^{\mathrm{out}}_{i_1,i_2}|\mathrm{in}\rangle = \frac{|t_\ell(\omega)|^2}{\exp\left(2\pi\omega/\kappa\right)-1} - \frac{\kappa^2 \ell_{\mathrm{Planck}}}{96\pi^3\omega}$$

Cáscaras auto-gravitantes cuánticas M. Campiglia, R.G, J. Olmedo, J.Pullin arXiv:1601:05688

$$
\begin{aligned}
H_T \;=\; \int dx \Big[& -N' \Big(-\sqrt{|E^x|}\,(1+K_\varphi^2) \\
& + \frac{\left[(E^x)'\right]^2 \sqrt{|E^x|}}{4\,(E^\varphi)^2} + F(r)p\,\Theta(x-r) + 2M \Big) \\
& + N^x \left[-(E^x)' K_x + E^\varphi K_\varphi' - p\,\delta\,(x-r) \right] \Big] \\
& + 2N_- M + N_+ \left[F(r)p + 2M \right],
\end{aligned}
$$

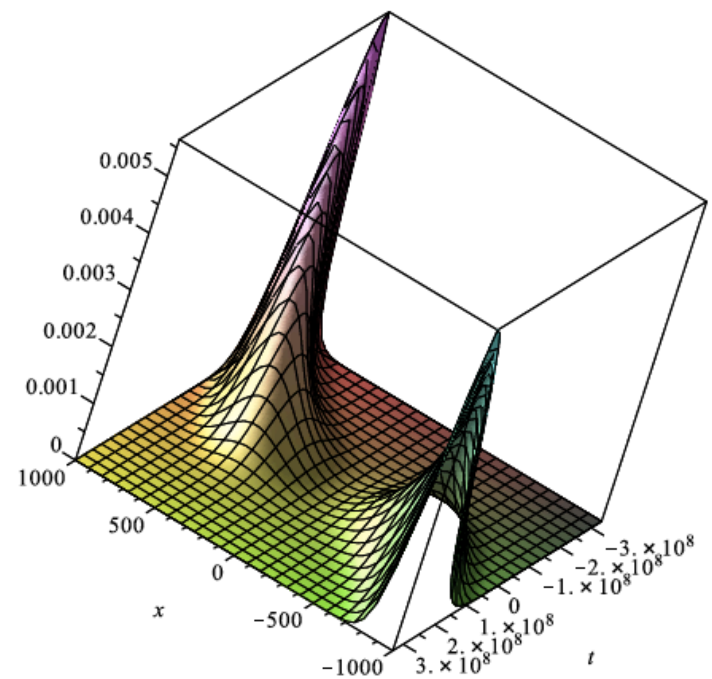
$$
F(r) \;=\; \sqrt{|E^x|} \left(\eta\,(E^x)'\,(E^\varphi)^{-2} + 2K_\varphi\,(E^\varphi)^{-1} \right) |_{x=r}
$$

Nuevamente se puede abelianizar el vinculo Hamiltoniano. Su cuantización es altamente no trivial pero se puede llevar a cabo. Los estados del espacio de Hilbert físico admiten una base identificada por los radios cuantizados de las esferas de simetría ya Identificadas en la solución de vacío del BH producto tensorial por funciones de cuadrado Integrable de la masa de la cáscara.

Los observables de Dirac asociados a la cáscara material son su masa y el punto de partida en el infinito nulo desde el cual fue lanzada.

Es posible determinar las componentes de la métrica en términos de los observables parametrizados y estudiar la evolución de un paquete que aproxima la cáscara clásica. Cuando ella alcanza la región donde clásicamente se formaría la singularidad, la cáscara continua sin dar lugar a infinitos hacia otra región del espacio.

La mayor limitación de este calculo es que siendo un calculo Hamiltoniano canónico la topología del espacio debe ser fijada desde el inicio. Hemos supuesto que es la de un agujero negro para obtener los resultados mencionados arriba.



A pesar de las limitaciones de cálculo mencionadas, este espacio tiempo cuántico abre la posibilidad de estudiar su evaporación, lo que no es posible a partir de agujeros negros eternos como el de Scwarzschild.

Este fue el primer calculo totalmente cuántico de un sistema material colapsante incluyendo back reaction.

Temas abiertos:

Ruptura de la invariancia Lorentz debido a la discretización del espacio tiempo.
En R. G, J Pullin IJMPD 23, 2023 (2014) arXiv: 1406.2610 propusimos una posible forma de resolver el problema.

Una teoría de gravedad cuantica como la propuesta no tiene divergencias. Sin embargo para recuperar la teoría de campos usual a bajas energías se deben aplicar técnicas de Teorías de Campo Efectivas lo que requiere una renormalización finita. Este es el primer paso para estudiar evaporación de agujeros negros

El problema de la renormalización propuesta es que depende del estado microscópico del espacio tiempo, en particular del espaciado de los vértices de la red de spines.

Pensando en este problema surgió una idea muy interesante de tratar la gravedad acoplada al Modelo Standard como una teoría con invariancia conforme local, donde todas las masas incluyendo la de los campos de Higgs surgen de rupturas de simetría.

Resumen

- Es posible cuantizar espacio tiempos con simetría esférica congelada.
- La versión cuántica de los agujeros negros da lugar a una estructura discreta dada por esferas de simetría de radio discreto
- El espacio resultante esta libre de singularidades y los agujeros negros conectan diferentes regiones del espacio tiempo.
- Se recuperan los resultados conocidos sobre la radiación de Hawking.
- Las técnicas de cuantización se pueden extender al caso cargado dando lugar a nuevas perspectivas acerca de las singularidades generadas en horizontes de Cauchy
- Se pueden tratar modelos de materia auto-colapsante que simulan los colapsos estelares.
- Posibles extensiones invariantes conformes son sugeridas por este análisis. Las mismas incluyen un tratamiento unificado del modelo standard en términos de lazos.