ESTUDIO DE SISTEMAS AXIALMENTE SIMÉTRICOS GENERALES

Justo H. Ospino Z.

Departamento de Matemática Aplicada e Instituto Universitario de Física Fundamental y Matemáticas, Universidad de Salamanca, Salamanca, España

September 29, 2016

Contenido

Introducción

- Las ecuaciones de Einstein son EDPs no lineales
- Ecuaciones de segundo orden
- Información adicional
- Física local
- Simetrías

Caso esférico

- Spherically symmetric dissipative anisotropic fluids: A General study
  L. Herrera, A. Di Prisco, J. Martin, J. Ospino, N.O. Santos, O. Troconis. Phys.Rev. D69 (2004) 084026
- Sistema de ecuaciones de primer orden
- Weyl, shear, anisotropia, disipación, inhomogeneidad en la densidad de energía
- Soluciones
- Structure and evolution of self-gravitating objects and the orthogonal splitting of the Riemann tensor
  L. Herrera, J. Ospino, A. Di Prisco, E. Fuenmayor, O. Troconis. Phys.Rev. D79 (2009) 064025
- $Y_{\alpha\beta}$, $X_{\alpha\beta}$, $Z_{\alpha\beta}$
- Superenergía de Bel y Super-Poynting
- Soluciones

Caso axialmente simétrico (con reflexión)

- Axially symmetric static sources: A general framework and some analytical solutions
  L. Herrera, A. Di Prisco, J. Ibáñez, J. Ospino. Phys.Rev. D87 (2013), 024014
- Factores de inhomogeneidad
- Soluciones
- Dissipative collapse of axially symmetric, general relativistic, sources: A general framework and some applications L. Herrera, A. Di Prisco, J. Ibáñez, J. Ospino. Phys.Rev. D89 (2014), 084034
- Soluciones

El Formalismo General

- La métrica General
- La tétrada
- Las variables cinemáticas
- Tensor de Energía-Impulso
- Tensor de Riemann en términos de los escalares de estructura
- Ecuaciones

La métrica General

- La métrica General

$$ds^2 = -A^2 dt^2 + B^2 dr^2 + C^2 d\theta^2 + R^2 d\phi^2 + 2(G_1 d\theta + G_2 d\phi)dt$$

Donde A, B ,C,R,G_1 y G_2 son funciones de t, r y θ.

- Base Ortonormal

$$\begin{aligned} V_\alpha &= (-A, 0, \frac{G1}{A}, \frac{G2}{A}) \qquad K_\alpha = (0, B, 0, 0) \\ L_\alpha &= (0, 0, \frac{\Delta_1}{A}, \frac{G_1 G_2}{A\Delta_1}) \qquad S_\alpha = (0, 0, 0, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}) \end{aligned}$$

- Con

$$\Delta_1 = \sqrt{A^2 C^2 + G_1^2}, \quad \Delta_2 = \sqrt{A^2 C^2 R^2 + C^2 G_2^2 + R^2 G_1^2}$$

Las variables cinemáticas

- La cuadriaceleración

$$a_\alpha = a_1 K_\alpha + a_2 L_\alpha + a_3 S_\alpha$$

- El shear

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta} &= \sigma_1(K_\alpha K_\beta - \frac{1}{3}h_{\alpha\beta}) + \sigma_2(L_\alpha L_\beta - \frac{1}{3}h_{\alpha\beta}) \\ &+ \sigma_3(S_\alpha S_\beta - \frac{1}{3}h_{\alpha\beta})\end{aligned}$$

- La vorticidad

$$\begin{aligned}\Omega_{\alpha\beta} &= \Omega_1(K_\alpha L_\beta - K_\beta L_\alpha) + \Omega_2(K_\alpha S_\beta - K_\beta S_\alpha) \\ &+ \Omega_3(L_\alpha S_\beta - L_\beta S_\alpha)\end{aligned}$$

- La expansión

$$\Theta = V^\alpha_{;\alpha} \quad (1)$$

- Tensor de Energía-Impluso:

$$T_{\alpha\beta} = \mu V_\alpha V_\beta + P h_{\alpha\beta} + \Pi_{\alpha\beta} + q_\alpha V_\beta + q_\beta V_\alpha .$$

$$\mu = T_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta , \quad q_\alpha = -\mu V_\alpha - T_{\alpha\beta} V^\beta ,$$

$$P = \frac{1}{3} h^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} , \quad \Pi_{\alpha\beta} = h^\mu_\alpha h^\nu_\beta \left(T_{\mu\nu} - P h_{\mu\nu} \right) ,$$

- El vector

$$q_\alpha = q_1 K_\alpha + q_2 L_\alpha + q_3 S_\alpha$$

- El tensor

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha\beta} &= \Pi_1 (K_\alpha K_\beta - \frac{1}{3} h_{\alpha\beta}) + \Pi_2 (L_\alpha L_\beta - \frac{1}{3} h_{\alpha\beta}) \\ &+ \Pi_3 K_{(\alpha} L_{\beta)} + \Pi_4 K_{(\alpha} S_{\beta)} + \Pi_5 L_{(\alpha} S_{\beta)} \end{aligned}$$

Partes Eléctrica y Magnética del tensor de Weyl

- Parte Eléctrica

$$E_{\alpha\beta} = C_{\alpha\nu\beta\delta} V^{\nu} V^{\delta}$$

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} &= \mathcal{E}_1 (K_\alpha K_\beta - \frac{1}{3} h_{\alpha\beta}) + \mathcal{E}_2 (L_\alpha L_\beta - \frac{1}{3} h_{\alpha\beta}) \\ &+ \mathcal{E}_3 K_{(\alpha} L_{\beta)} + \mathcal{E}_4 K_{(\alpha} S_{\beta)} + \mathcal{E}_5 L_{(\alpha} S_{\beta)} \end{aligned}$$

- Parte Magnética

$$H_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \eta_{\alpha\nu\epsilon\rho} C_{\beta\delta}{}^{\epsilon\rho} V^{\nu} V^{\delta} \, ,$$

$$\begin{aligned} H_{\alpha\beta} &= \mathcal{H}_1 (K_\alpha K_\beta - \frac{1}{3} h_{\alpha\beta}) + \mathcal{H}_2 (L_\alpha L_\beta - \frac{1}{3} h_{\alpha\beta}) \\ &+ \mathcal{H}_3 K_{(\alpha} L_{\beta)} + \mathcal{H}_4 K_{(\alpha} S_{\beta)} + \mathcal{H}_5 L_{(\alpha} S_{\beta)} \end{aligned}$$

donde $\epsilon_{\alpha\beta\rho} = \eta_{\nu\alpha\beta\rho} V^{\nu}$.

Descomposición Ortogonal del Tensor de Riemann

$$R^{\alpha\beta}{}_{\nu\delta} = R^{\alpha\beta}_{(F)\ \nu\delta} + R^{\alpha\beta}_{(Q)\ \nu\delta} + R^{\alpha\beta}_{(E)\ \nu\delta} + R^{\alpha\beta}_{(H)\ \nu\delta},$$

con

$$R^{\alpha\beta}_{(F)\ \nu\delta} = \frac{16\pi}{3}(\mu + 3P)V^{[\alpha}V_{[\nu}h^{\beta]}_{\delta]} + \frac{16\pi}{3}\mu h^{\alpha}_{[\nu}h^{\beta}_{\delta]},$$

$$R^{\alpha\beta}_{(Q)\ \nu\delta} = -16\pi V^{[\alpha}h^{\beta]}_{[\nu}q_{\delta]} - 16\pi V_{[\nu}h^{[\alpha}_{\delta]}q^{\beta]} - 16\pi V^{[\alpha}V_{[\nu}\Pi^{\beta]}_{\delta]} + 16\pi h^{[\alpha}_{[\nu}\Pi^{\beta]}_{\delta]}$$

$$R^{\alpha\beta}_{(E)\ \nu\delta} = 4V^{[\alpha}V_{[\nu}E^{\beta]}_{\delta]} + 4h^{[\alpha}_{[\nu}E^{\beta]}_{\delta]},$$

$$R^{\alpha\beta}_{(H)\ \nu\delta} = -2\epsilon^{\alpha\beta\gamma}V_{[\nu}H_{\delta]\gamma} - 2\epsilon_{\nu\delta\gamma}V^{[\alpha}H^{\beta]\gamma},$$

El tensor de Riemann

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu} &= 2V_\mu V_{[\alpha} Y_{\beta]\nu} + h_{\alpha[\nu} X_{\mu]\beta} + 2V_\nu V_{[\beta} Y_{\alpha]\mu} \\ &+ h_{\beta\nu}(h_{\alpha\mu} X_T - X_{\alpha\mu}) + h_{\beta\mu}(X_{\alpha\nu} - h_{\alpha\nu} X_T) \\ &+ 2V_{[\nu} Z^\delta{}_{\mu]} \epsilon_{\alpha\beta\delta} + 2V_{[\beta} Z^\delta{}_{\alpha]} \epsilon_{\mu\nu\delta} \end{aligned}$$

El tensor de Ricci

$$\begin{aligned} R_{\alpha\mu} &= -X_{\alpha\mu} - Y_{\alpha\mu} + V_\alpha V_\mu Y_T + h_{\alpha\mu} X_T \\ &+ Z^{\nu\beta} \epsilon_{\mu\nu\beta} V_\alpha + V_\mu Z^{\nu\beta} \epsilon_{\alpha\nu\beta} \end{aligned}$$

Con

$$\begin{aligned} Y_{\alpha\beta} &= \frac{1}{3} Y_T h_{\alpha\beta} + E_{\alpha\beta} - 4\pi \Pi_{\alpha\beta} \\ X_{\alpha\beta} &= \frac{1}{3} X_T h_{\alpha\beta} - E_{\alpha\beta} - 4\pi \Pi_{\alpha\beta} \\ Z_{\alpha\beta} &= H_{\alpha\beta} + 4\pi q^\delta \epsilon_{\alpha\beta\delta} \end{aligned}$$

Ecuaciones

- $$V_{\alpha;\beta} = -a_\alpha V_\beta + \sigma_{\alpha\beta} + \Omega_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}\Theta h_{\alpha\beta}$$

- Identidades de Ricci

$$2V_{\alpha\,;[\beta;\gamma]} = R_{\delta\alpha\beta\gamma}V^\delta\,, \qquad 2K_{\alpha\,;[\beta;\gamma]} = R_{\delta\alpha\beta\gamma}K^\delta\,,$$

$$2L_{\alpha\,;[\beta;\gamma]} = R_{\delta\alpha\beta\gamma}L^\delta\,, \qquad 2S_{\alpha\,;[\beta;\gamma]} = R_{\delta\alpha\beta\gamma}S^\delta$$

- Identidades de Bianchi

$$R^\alpha{}_{\beta\nu\delta;\alpha} + R_{\beta\nu;\delta} - R_{\beta\delta;\nu} = 0$$

Futuros trabajos

- Caso estacionario

$$ds^2 = -A^2 dt^2 + B^2 dr^2 + C^2 d\theta^2 + R^2 d\phi^2 + 2(G_1 d\theta + G_2 d\phi)dt$$

- Fuentes para la solución de Kerr
- Relación entre la vorticidad y la radiación gravitacional
- El vector de Superpoynting

$$P_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}(Y^\gamma_\delta Z^{\beta\delta} - X^\gamma_\delta Z^{\delta\beta})$$

Futuros trabajos

- Estudiar los casos generales
- El caso shear-free
- El caso geodésico
- Soluciones conformemente planas