A new model for describe astrophysical objects with oblate or prolate deformation

Framsol López Suspes
Guilermo A. González V. &
Jerson I. Reina M.

Universidad Santo Tomás & UIS - Bucaramanga

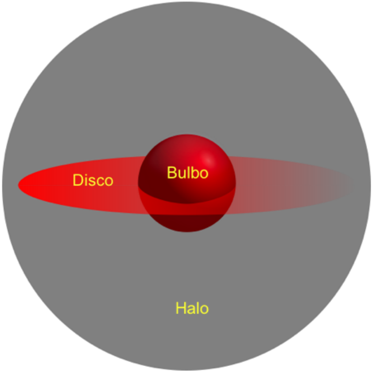
framsol.lopez@ustabuca.edu.co

30 de septiembre de 2016

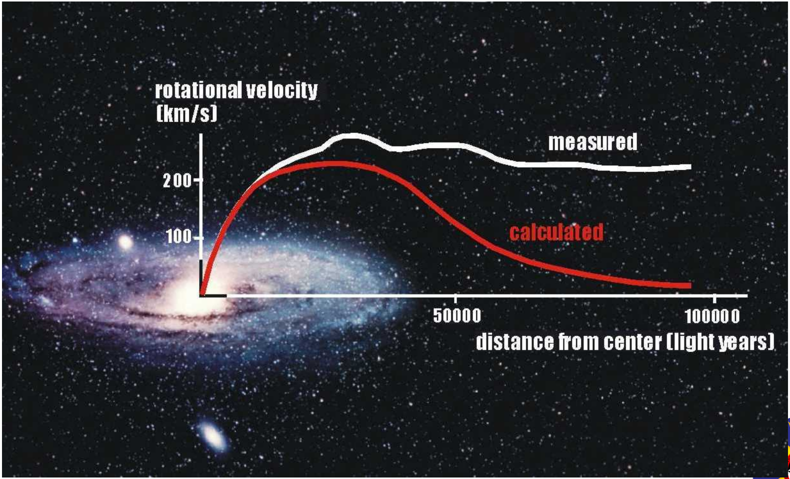
Contenido

1. Motivación
   - Galaxia Espiral
   - Curva de Rotación
   - Potenciales Gravitatorios
2. Estabilidad del Modelo
3. Nuevo Potencial

Componentes Galaxia Espiral



Curva de Rotación



Potenciales Gravitatorios

- Potenciales esféricos

$$\Phi(r) = \begin{cases} -2\pi G\rho(a^2 - r^2/3) & si \quad r \leq a \\ \\ -GM/r & si \quad r \geq a \end{cases}$$

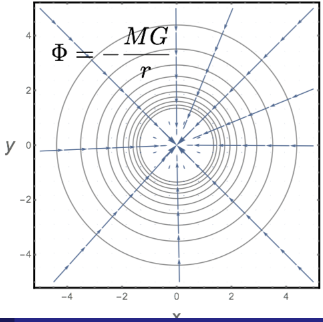
donde $\rho = M/(4\pi a^3)$.

Potenciales Gravitatorios

- Potenciales esféricos

$$\Phi(r) = \begin{cases} -2\pi G\rho(a^2 - r^2/3) & si \quad r \leq a \\ \\ -GM/r & si \quad r \geq a \end{cases}$$

donde $\rho = M/(4\pi a^3)$.



- Potencial esférico - Plummer

$$\Phi_P = \frac{-G\,M}{\sqrt{r^2 + a^2}}; \quad \rho = \frac{3M}{4\pi\, a^3}\left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-5/2}$$

- Potencial esférico - Plummer

$$\Phi_P = \frac{-G\,M}{\sqrt{r^2 + a^2}}; \quad \rho = \frac{3M}{4\pi\,a^3}\left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-5/2}$$

- Potencial esférico - Hernquist

$$\Phi_H = \frac{-G\,M}{r + a}; \quad \rho = \frac{M}{2\pi}\frac{a}{r(r+a)^3}$$

- Potencial esférico - Plummer

$$\Phi_P = \frac{-G\,M}{\sqrt{r^2 + a^2}}; \quad \rho = \frac{3M}{4\pi\,a^3}\left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-5/2}$$

- Potencial esférico - Hernquist

$$\Phi_H = \frac{-G\,M}{r + a}; \quad \rho = \frac{M}{2\pi}\frac{a}{r(r + a)^3}$$

- Potencial axialmente simétricos - Disco de Kuzmin

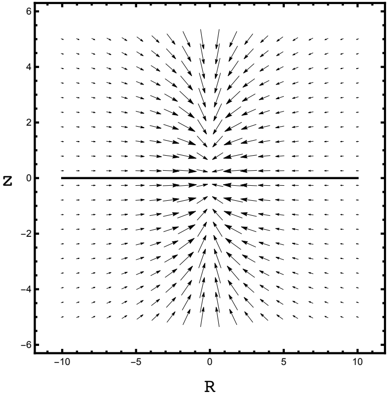
$$\Phi_K = \frac{-GM}{\sqrt{R^2 + (a + \mid z \mid)^2}}; \quad \Sigma_K = \frac{aM}{2\pi(R^2 + a^2)^{3/2}}$$

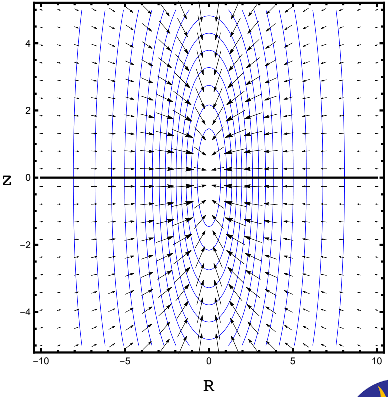
- Potencial Toomre

$$\Phi_T = \left(\frac{d}{da^2}\right)^{n-1} \Phi_K; \quad \Sigma_T = \left(\frac{d}{da^2}\right)^{n-1} \sigma_K$$

- Potencial Toomre

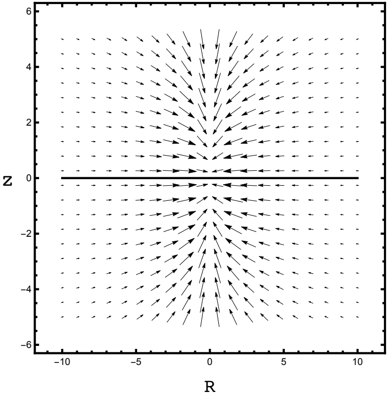
$$\Phi_T = \left(\frac{d}{da^2}\right)^{n-1} \Phi_K; \quad \Sigma_T = \left(\frac{d}{da^2}\right)^{n-1} \sigma_K$$

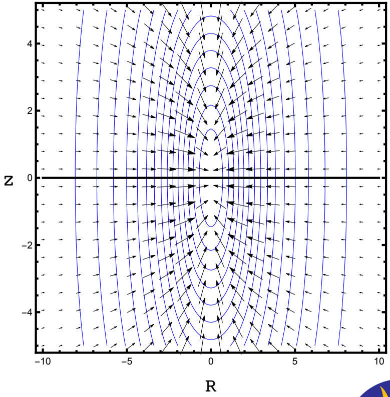




- Potencial Toomre

$$\Phi_T = \left(\frac{d}{da^2}\right)^{n-1} \Phi_K; \quad \Sigma_T = \left(\frac{d}{da^2}\right)^{n-1} \sigma_K$$





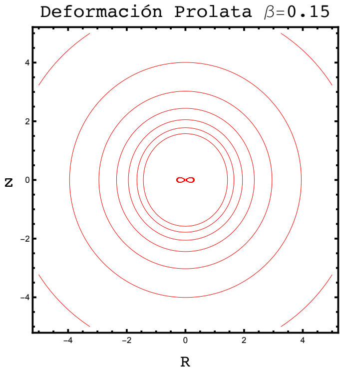
$$\frac{dR}{dz} = -\frac{\Phi_z}{\Phi_R}$$

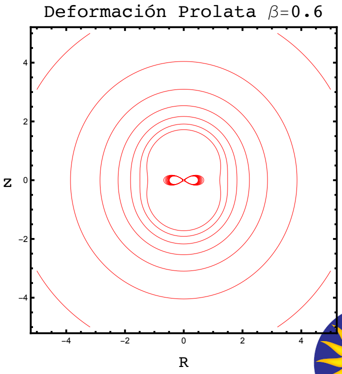
- Expansión multipolar

$$\Phi(R,z) = -\frac{\alpha}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{\beta\left(2z^2 - R^2\right)}{2\left(R^2+z^2\right)^{5/2}} - \frac{\gamma\left(2z^3 - 3R^2 z\right)}{2\left(R^2+z^2\right)^{7/2}}$$

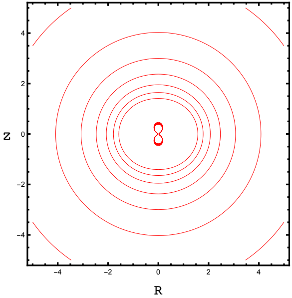
- Expansión multipolar

$$\Phi(R,z) = -\frac{\alpha}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{\beta\left(2z^2-R^2\right)}{2\left(R^2+z^2\right)^{5/2}} - \frac{\gamma\left(2z^3-3R^2z\right)}{2\left(R^2+z^2\right)^{7/2}}$$

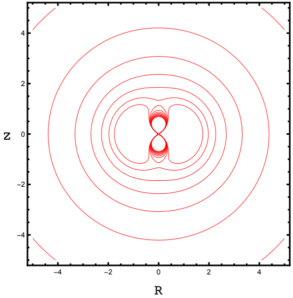




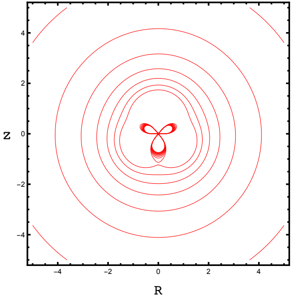
Deformación Oblata β=−0.15



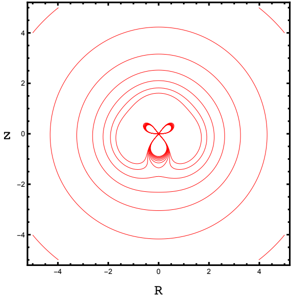
Deformación Oblata β=−0.5



Deformación Tipo Pera β=0.1,γ=0.5



Deformación Tipo Pera β=−0.3,γ=0.5



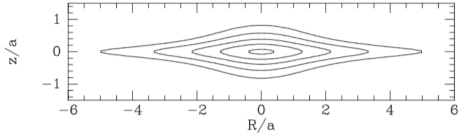
- Potencial Aplanado Miyamoto-Nagai

$$\Phi_{MN} = \frac{-GM}{\sqrt{R^2 + (a + \sqrt{b^2 + z^2})^2}} \quad \Rightarrow \quad 4\pi G\rho = \nabla^2\Phi$$

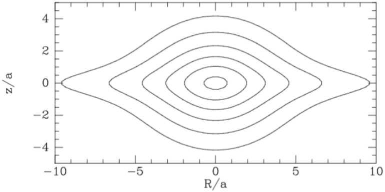
esto es, se cambio $z \to a + \sqrt{b^2 + z^2}$, donde a y b son constantes.

- Potencial de Satoh

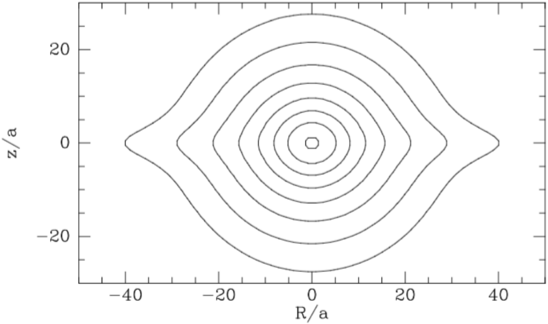
$$\Phi_S = \left(\frac{d}{db^2}\right)^n \Phi_{MN};$$



a/b=0.2



a/b=1



a/b=5

Ecuaciones de Campo

Potencial axialmente simétrico

$$\Phi = \Phi(R, z); \qquad \nabla^2\Phi = \Phi_{,RR} + \frac{\Phi_{,R}}{R} + \Phi_{,zz} = 0$$

Superposición de soluciones

$$\Phi = \Phi_h + \Phi_d \qquad \Rightarrow \qquad \nabla^2\Phi = \nabla^2\Phi_h + \nabla^2\Phi_d = \nabla^2\Phi_h = 4\pi G\rho$$

Ecuaciones de movimiento

$$\dot{R} = V_R \ , \qquad \dot{z} = V_z \ , \tag{1}$$

$$\dot{V}_R = -\frac{\partial}{\partial R}\Phi_{eff} \ , \qquad \dot{V}_z = -\frac{\partial}{\partial z}\Phi_{eff} \, , \tag{2}$$

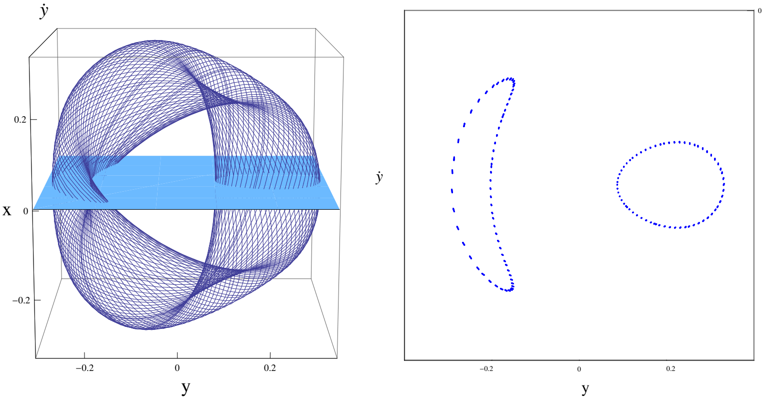
siendo Φ_{eff} es un potencial auxiliar conocido como potencial efectivo, el cual está dado por

$$\Phi_{eff}(R,z) = \tilde{\Phi}(R,z) + \frac{\ell^2}{2R^2}. \tag{3}$$

Acá ℓ es la integral primera de movimiento. La otra cantidad constante en el movimiento es la energía total específica o el hamiltoniano específico dado por

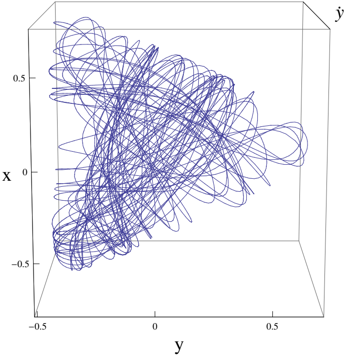
$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(V_R^2 + V_z^2) + \Phi_{eff}(R,z) = \mathcal{H}. \tag{4}$$

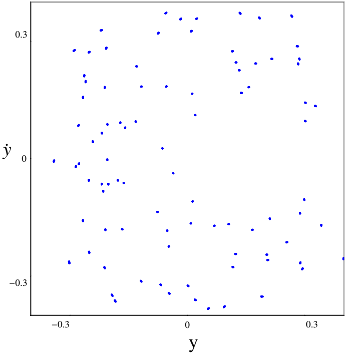
Potencial de Hénon Heiles



(a) Espacio de Fases. (b) Superficie de Poincaré. Sistema Hénon Heiles. Trayectoria regular.

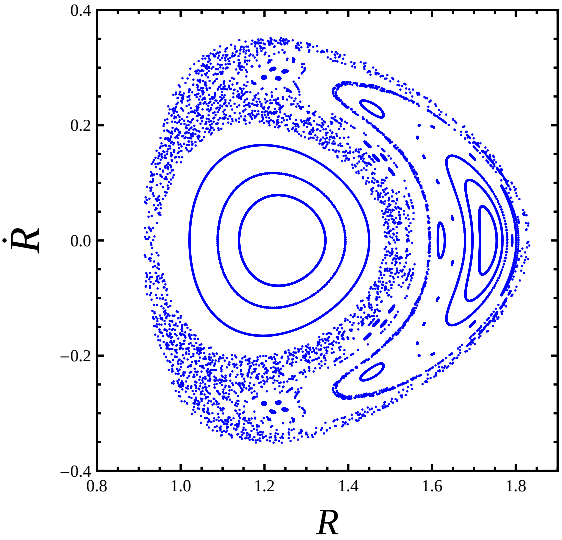
Potencial de Hénon Heiles

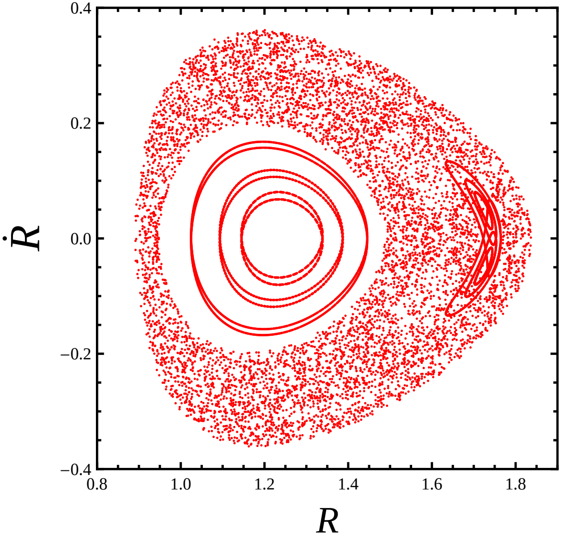




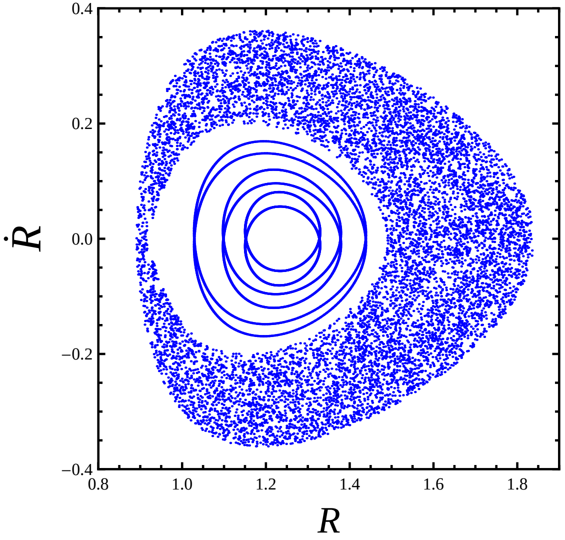
(a) Espacio de Fases. (b) Superficie de Poincaré. Sistema Hénon Heiles. Trayectoria caótica.

Deformacion Prolata + Octupolar




0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
$\dot{R}$
R

Deformacion Prolata + Octupolar



Estas cantidades físicas son encontradas y evaluadas en el plano de la fuente, plano $z = 0$, ellas son: la velocidad circular, v_c, la frecuencia epíciclica, κ, y la frecuencia vertical, ν. Las expresiones para cada una de ellas son (**Binney & Tremaine**, 2008)

$$v_\mathrm{c}^2 = R\tilde{\Phi}_{,R},$$

$$\kappa^2 = \tilde{\Phi}_{,RR} + \frac{3}{R}\tilde{\Phi}_{,R},$$

$$\nu^2 = \tilde{\Phi}_{,zz},$$

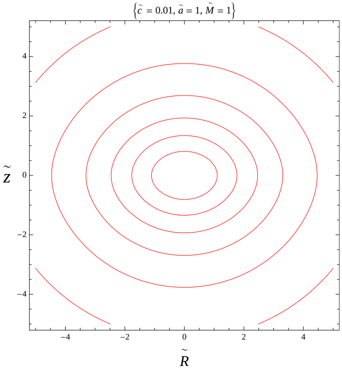
Nuevo Potencial

El modelo es una extensión del Miyamoto & Nagai, él se obtiene con la inclusión de la transformación en la coordenada radial $R \rightarrow c + \sqrt{R^2 + b^2}$, por lo tanto el nuevo potencial triaxial tendrá un potencial gravitacional dado por la expresión

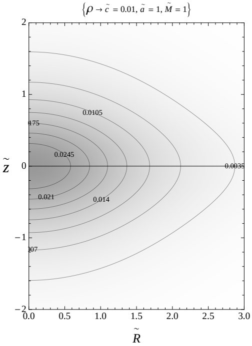
$$\Phi_{LSRG} = \frac{\tilde{M}}{\left(\left(\sqrt{\tilde{R}^2 + 1} + \tilde{c}\right)^2 + \left(\tilde{a} + \sqrt{\tilde{z}^2 + 1}\right)^2\right)^{1/2}}$$

siendo $\tilde{M} = MG/b$, $\tilde{R} = R/b$, $\tilde{z} = z/b$, $\tilde{c} = c/b$ y $\tilde{a} = a/b$. Los parámetros $\tilde{c} = c/b$ y $\tilde{a} = a/b$, definen la deformación prolata y oblata, respectivamente. La densidad de masa se puede encontrar mediante la ecuación de Laplace, esto es

$$\rho = \frac{1}{4\pi G} \nabla^2 \Phi_{LSRG} \ .$$



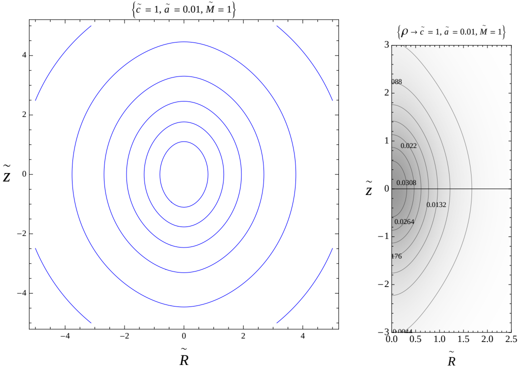
(a)



(b)

Figura: (a) Isocontornos del potencial. (b) Superficies de nivel de la Densidad de masa. Los parámetros usados son $\tilde{M} = 1$, $\tilde{c} = 1$ y $\tilde{a} = 0{,}01$.

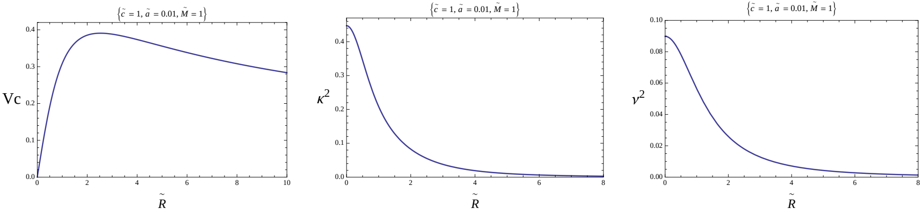
Deformación Prolata



(a) (b)

Figura: (a) Isocontornos del potencial. (b) Superficies de nivel de la Densidad de masa. Los parámetros usados son $\tilde{M} = 1$, $\tilde{c} = 0{,}01$ y $\tilde{a} = 1$.

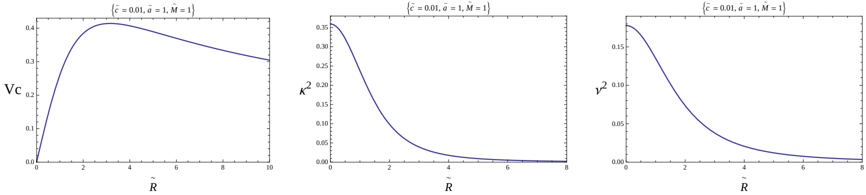
Deformación Oblata



(a) (b) (c)

Figura: (a) Velocidad Circular. (b) Frecuencia epíciclica. (c) Frecuencia vertical. Los parámetros utilizados son $\tilde{M} = 1$, $\tilde{c} = 1$ y $\tilde{a} = 0{,}01$, Deformación Oblata.

Deformación Prolata



(a) (b) (c)

Figura: (a) Velocidad Circular. (b) Frecuencia epíciclica. (c) Frecuencia vertical. Los parámetros utilizados son $\tilde{M} = 1$, $\tilde{c} = 0{,}01$ y $\tilde{a} = 1$, Deformación Prolata.