



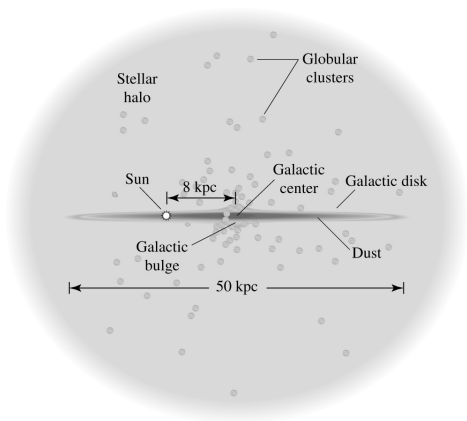
Discos Delgados Axialmente Simétricos con Halo en Relatividad General

GUILLERMO A. GONZALEZ
OSCAR MAURICIO PIMENTEL DÍAZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA

NOVIEMBRE - 2014

Introducción



- Obtener soluciones exactas axialmente simétricas a las ecuaciones de Einstein que describan discos delgados inmersos en halos esferoidales de materia.
 - ▶ Densidades de energía.
 - ▶ Presiones de los fluidos.
 - ▶ Masa del sistema.
- Discos infinitos y discos finitos.
- El movimiento de partículas en órbitas circulares en el disco (Curvas de rotación).

- Primeros modelos: Bonnor y Sackfield en 1968, Morgan y Morgan en 1969.
- Discos estáticos: D. Lynden-Bell y S. Pineault, 1978; P. S. Letelier y S. R. Oliveira, 1978; G. A. González y P. S. Letelier, 1999; G. A. González y O. A. Espitia, 2003.
- Discos estacionarios: D. Lynden-Bell y S. Pineault, 1978; J. Bičák y T. Ledvinka, 1993; C. Pichon y D. Lynden-Bell, 1996.
- Discos con halo:
 - ▶ D. Vogt y P. S. Letelier, Phys. Rev. D, 70:064003, 2004.
 - ▶ A. C. Gutiérrez, G. A. González y H. Quevedo, Phys.Rev., D87(4):044010, 2013.

Soluciones Discoidales Axialmente Simétricas con Halo.

Usando el método distribucional [W.Israel, 1966], podemos escribir la ecuaciones de Einstein como,

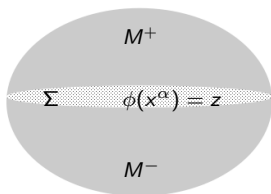
$$T_{\alpha\beta}^{\pm} = R_{\alpha\beta}^{\pm} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R^{\pm}, \quad (1)$$

$$Q_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}H, \quad (2)$$

donde $Q_{\alpha\beta}$ es el tensor de momento-energía en Σ , y $H_{\alpha\beta}$ es el tensor de Ricci en Σ . Ahora, para la métrica conformestática,

$$ds^2 = -e^{2\psi}dt^2 + e^{-2\psi}(dr^2 + r^2d\varphi^2 + dz^2), \quad (3)$$

donde exigimos que $\psi(r, -z) = \psi(r, z)$, calculamos las cantidades físicas,



$$\rho = e^{2\psi}(2\nabla^2\psi - \nabla\psi \cdot \nabla\psi), \quad (4)$$

$$p = \frac{1}{3}e^{2\psi}\nabla\psi \cdot \nabla\psi, \quad (5)$$

$$\sigma = 4e^\psi\psi_{,z}. \quad (6)$$

Una manera de satisfacer las condiciones de energía [S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, 1973] es considerar funciones ψ que sean solución de la ecuación

$$\nabla^2\psi = k\nabla\psi \cdot \nabla\psi, \quad (7)$$

con $k \geq 1$ y $\psi_{,z}|_{z=0^+} \geq 0$. Ésto implica una ecuación de estado para el fluido del halo de la forma,

$$p = \frac{\rho}{3(2k - 1)}. \quad (8)$$

La ecuación (7) se puede reescribir como $\nabla^2(e^{-k\psi}) = 0$, la cual está relacionada con la ecuación de Laplace $\nabla^2 U = 0$ mediante la relación $e^{-k\psi} = 1 - U$

Finalmente, para calcular la masa del sistema disco-halo usamos la formula de Komar [E. Poisson, 2004],

$$M = 2 \int \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta} \right) m_{\alpha} \xi_{(t)}^{\beta} \sqrt{h} d^3 y, \quad (9)$$

donde m_{α} es el vector normal a la hipersuperficie tipo tiempo, $\xi_{(t)}^{\beta}$ es el vector de killing, y $\sqrt{h} d^3 y$ es el elemento de volumen.

Geodésicas Circulares

Resolvemos la ecuación de la geodésica para una partícula tipo tiempo que se mueve en el plano del disco. Considerando que la cuadri-velocidad de la partícula tiene la forma $u^{\alpha} = u^0(1, 0, \omega, 0)$, la expresión resultante para el cuadrado de la velocidad circular toma la forma

$$v_c^2 = \frac{rU_{,r}}{k(1 - U) - rU_{,r}} \quad (10)$$

Discos de Kuzmin-Toomre con Halo (Discos Infinitos)

tomamos U como [G. G. Kuzmin, 1956]

$$U_n(r, \theta) = - \sum_{l=0}^n \frac{A_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta),$$

donde $R^2 = r^2 + (|z| + a)^2$.

- Masa del sistema (para el modelo $n = 0$):

La masa total es

$$M_{T_0} = M_{D_0} + M_{H_0} = \frac{8\pi A_0}{k},$$

donde M_{H_0} es la masa del halo, y

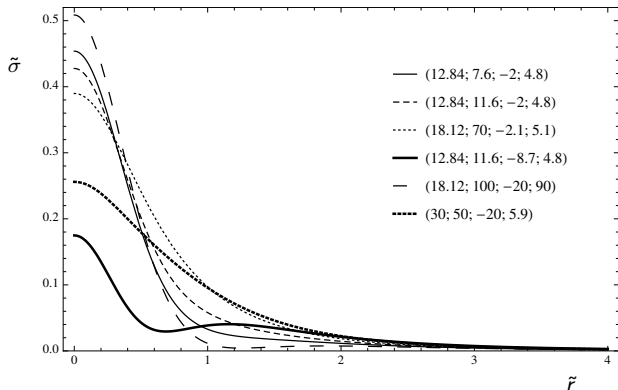
$$M_{D_0} = \frac{8\pi a}{k} \ln(1 + A_0/k)$$

es la masa del disco

• Densidad de energía del disco para el modelo $n=2$

$$\tilde{\sigma}_2 = \frac{\left[(\tilde{A}_0 - \tilde{A}_1)m^2 + 3(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)m + \frac{5}{2}\tilde{A}_2(2 - \tilde{r}^2) \right] m^{\frac{5-2k}{k}}}{\left[2m^{5/2} + 2\tilde{A}_0m^2 + 2\tilde{A}_1m + \tilde{A}_2(2 - \tilde{r}^2) \right]^{\frac{1+k}{k}}},$$

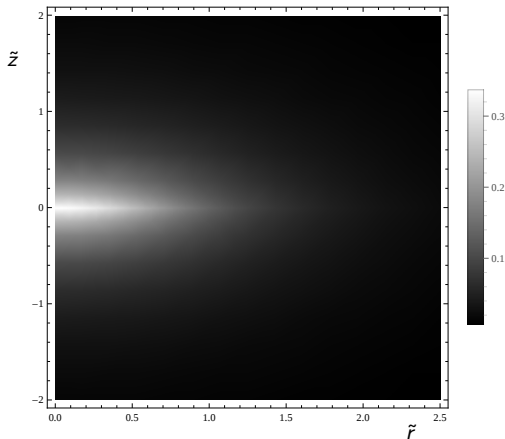
donde $m = 1 + \tilde{r}^2$, $\tilde{r} = r/a$, $\tilde{A}_0 = A_0/a$, $\tilde{A}_1 = A_1/a^2$, $\tilde{A}_2 = A_2/a^3$, y $\tilde{\sigma}_n = (ka/4)\sigma_n$.



- Densidad de energía del halo para el modelo $n=0$

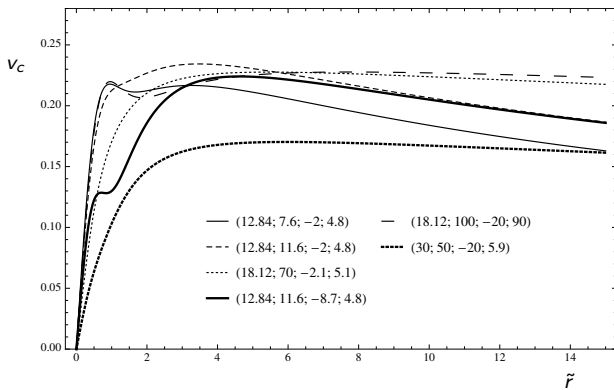
$$\tilde{\rho}_0 = \frac{\tilde{A}_0^2 \left(\tilde{A}_0 + \sqrt{\tilde{M}} \right)^{-2(k+1)/k}}{\tilde{M}^{(k-1)/k}},$$

donde $\tilde{M} = \tilde{r}^2 + \tilde{Z}^2$, $\tilde{Z} = |\tilde{z}| + 1$, $\tilde{z} = z/a$, y $\tilde{\rho}_n = [(ka)^2/(2k-1)]\rho_n$.



• Velocidad circular para el modelo $n=2$

$$v_{c2}^2 = \frac{\tilde{r}^2 [3\tilde{A}_2 + 3\tilde{A}_1 m^2 + \tilde{A}_0 m^4 + \frac{3}{2}\tilde{A}_2(3-m)m]}{k[m^2 + m\tilde{A}_1 + m^3\tilde{A}_0 + \frac{1}{2}\tilde{A}_2(3-m)]m^3 - \tilde{r}^2 [3\tilde{A}_2 + 3\tilde{A}_1 m^2 + \tilde{A}_0 m^4 + \frac{3}{2}\tilde{A}_2(3-m)m]}$$



Discos de Kalnajs con Halo (Discos Finitos)

Tomamos U como

$$U_m(\xi, \eta) = - \sum_{n=0}^m C_{2n} q_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta),$$

donde $q_{2n} = i^{2n+1} Q_{2n}(i\xi)$, siendo $Q_{2n}(i\xi)$ las funciones de Legendre de segundo tipo de argumento imaginario, y donde C_{2n} son constantes que se eligen apropiadamente para ser diferentes de cero si $n \leq m$ y cero si $n > m$, para $m \geq 1$ [Guillermo A. González y Jerson I. Reina, 2006].

- Masa del sistema (para el modelo $m = 1$):

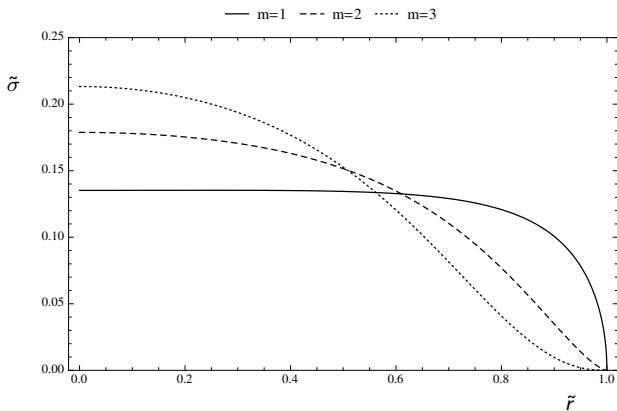
La masa total es

$$M_T = \frac{8\pi a C_0}{k}.$$

La masa del disco para el primer modelo ($m = 1$) es

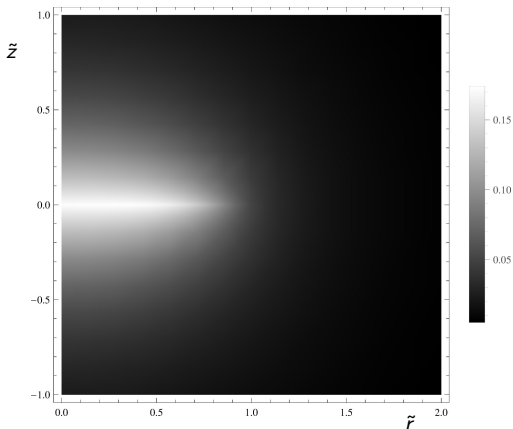
$$M_{D_1} = \frac{64a}{k} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{8}{3\pi C_0}} \operatorname{arccot} \sqrt{\frac{3\pi C_0}{3\pi C_0 + 8}} \right]$$

- Densidad de energía del disco para los tres primeros modelos ($m = 1, 2, 3$) y para los valores de las constantes $k = 20$ y $\tilde{M} = 30$.



En estos tres modelos, $\tilde{\sigma}_m = (ka/\tilde{M})\sigma_m$, $\tilde{r} = r/a$ y $\tilde{M} = M/a$

- Densidad de energía del halo para el modelo $m=1$.



Esta figura corresponde a la densidad de energía reescalada $\tilde{\rho} = \frac{k^2 a^2}{(2k-1)\tilde{M}^2} \rho$ como función de $\tilde{r} = r/a$ y $\tilde{z} = z/a$

- Velocidad circular para los tres primeros modelos ($m = 1, 2, 3$) y para los valores de las constantes $k = 20$ y $\tilde{M} = 30$.

