

Sistemas Dinámicos Aplicados a Campos Vectoriales en el Marco de la Teoría de Horndeski

Autor: Andrés Navarro ¹

Director: Dr. Yeinzon Rodríguez García^{1,2}

¹Grupo de Investigación en Relatividad y Gravitación - UIS

²Grupo de Física - Fenomenología de Partículas Elementales y Cosmología - UAN

Jornadas Científicas

Escuela de Física

Universidad Industrial de Santander

28 de Noviembre de 2014

- La introducción de una era inflacionaria (inflación) proporciona una solución a los problemas en el modelo cosmológico estándar del Big Bang.
- Inflación es usualmente generada por uno o más campos escalares.
- En 1974 G. W. Horndeski construyó la acción más general posible que involucra sólo un campo escalar con acoplamientos no mínimos a la gravedad¹.

¹G. W. Horndeski, Int. J. Theor. Phys. **10**, 363 (1974).

- Los experimentos muestran la presencia de anomalías en la RCF lo cual refleja un desacuerdo con los modelos inflacionarios que involucran campos escalares.
- Las anomalías en la RCF sugieren la presencia de una dirección privilegiada en el universo.
- Una posibilidad para generar esta dirección privilegiada es mediante la inclusión de campos vectoriales durante el período inflacionario².

²K. Dimopoulos, Phys. Rev. D **74**, 083502 (2006).
S. Yokoyama y J. Soda, JCAP **0808**, 005 (2008).
M. Watanabe, S. Kanno y J. Soda, Phys. Rev. Lett. **102**, 191302 (2009).
K. Dimopoulos, M. Karčiauskas, D. H. Lyth y Y. Rodríguez, JCAP **0905**, 013 (2009).

Acción de Horndeski

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_{\text{pl}}}{2} R + P(\phi, X) + G_3(\phi, X) \square \phi + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_5 \right], \quad (1)$$

en donde g es el determinante del tensor métrico $g_{\mu\nu}$, M_{pl} es la masa reducida del Planck, R es el escalar de Ricci y

$$\mathcal{L}_4 = G_4(\phi, X) R + G_{4,X}(\phi, X) [(\square \phi)^2 - \phi^{;\mu\nu} \phi_{;\mu\nu}], \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_5 = & G_5(\phi, X) G_{\mu\nu} \phi^{;\mu\nu} \\ & - \frac{G_{5,X}(\phi, X)}{6} [(\square \phi)^3 - 3(\square \phi) \phi_{;\mu\nu} \phi^{;\mu\nu} + 2\phi_{;\mu\nu} \phi^{;\mu\lambda} \phi^{;\nu}_{;\lambda}] . \end{aligned} \quad (3)$$

- El punto y coma representa la derivada covariante.
- Las funciones P y G_i con $i = 3, 4, 5$ son funciones del campo escalar ϕ y su energía cinética $X \equiv -\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi / 2$.
- $G_{i,X}$ representa la derivada parcial $\partial G_i / \partial X$.

- Gravedad Modificada

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \boxed{\dots} = 4\pi(T_{\mu\nu} + \boxed{\dots})$$


- Gravedad Modificada

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \boxed{\dots} = 4\pi(T_{\mu\nu} + \boxed{\dots})$$

- Energía Oscura

1. Energía Oscura

- Quintaesencia:

$$P(\phi, X) = -X - V(\phi), G_3 = G_4 = G_5 = 0.$$

- K-esencia:

$$P(\phi, X) = \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2, G_3 = G_4 = G_5 = 0.$$

2. Gravedad Modificada

- Teoría de Brans-Dicke (BD):

$$P(\phi, X) = -\frac{M_{\text{pl}} w_{\text{BD}} X}{2\phi} - V(\phi), G_3 = 0, G_4 = \frac{1}{2}M_{\text{pl}}\phi, G_5 = 0,$$

en donde w_{BD} es el parámetro de BD ($w_{\text{BD}} = -1$ es *Dilaton gravity*).

- Gravedad $f(R)$:

$$P(\phi, X) = -\frac{M_{\text{pl}}}{2}(RF - f), G_3 = 0, G_4 = \frac{1}{2}M_{\text{pl}}^2 F, G_5 = 0,$$

en donde $f(R)$ es una función del escalar de Ricci y $F \equiv \partial f / \partial R$.

- Galileones Covariantes:

$$P(\phi, X) = c_2 X, G_3 = c_3 X, G_4 = \frac{M_{\text{pl}}^2}{2} + c_4 X^2, G_5 = c_5 X^2,$$

en donde c_i ($i = 2, 3, 4, 5$) son constantes. Las ecuaciones de movimiento de los campos son invariantes bajo la transformación: $\partial_\mu \phi \rightarrow \partial_\mu \phi + b_\mu$.

Expansión Anisótropa

- La débil evidencia de anisotropía estadística puede ser consecuencia de una expansión anisótropa.
- Una forma de parametrizar la expansión anisotrópa es mediante la métrica de Bianchi I

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2\alpha(t)} \left[e^{-4\sigma(t)} dx^2 + e^{2\sigma(t)} (dy^2 + dz^2) \right]. \quad (4)$$

- $a = e^{\alpha(t)}$ es el parámetro de expansión global.
- e^{σ} parametriza la expansión anisótropa.
- *Shear* $\Sigma = \dot{\sigma}$ y el parámetro de Hubble global $H = \dot{a}/a = \alpha$.

- Las parámetros Σ y H son cantidades físicas que pueden ser contrastadas con la observación.
- El cociente Σ/H hoy en día se encuentra en el rango³

$$\left| \frac{\Sigma}{H} \right| < 0,012, \quad (5)$$

el cual incluye la posibilidad de expansión isótropa.

³L. Campanelli, P. Cea, G. Fogli, y A. Marrone, Phys. Rev. D **83**, 103503 (2011).
B. Kalus, D. J. Schwarz, M. Seikel, y A. Wiegand, Astron. Astrophys. **553**, A56 (2013).

Anomalías en la RCF

- **Puntos Fríos**

Regiones en el mapa de la RCF en donde la temperatura es inferior que la promedio.

- **Alineamiento del cuadrupolo y el octupolo**

Los datos provenientes del primer año de datos del satélite PLANCK muestran que tan sólo están desalineados entre 9° y 13° . El noveno año de resultados del WMAP muestra un alineamiento 3° superior.

- **Asimetría Hemiesférica**

El espectro angular de la RCF en el hemisferio sur es sustancialmente más grande que el espectro angular de la RCF en el hemisferio opuesto.

- **Carencia de Amplitud Espectral a Bajos Multipolos**

El espectro angular es más pequeño comparado con las simulaciones sobre el mejor modelo teórico para multipolos con $l < 30$.

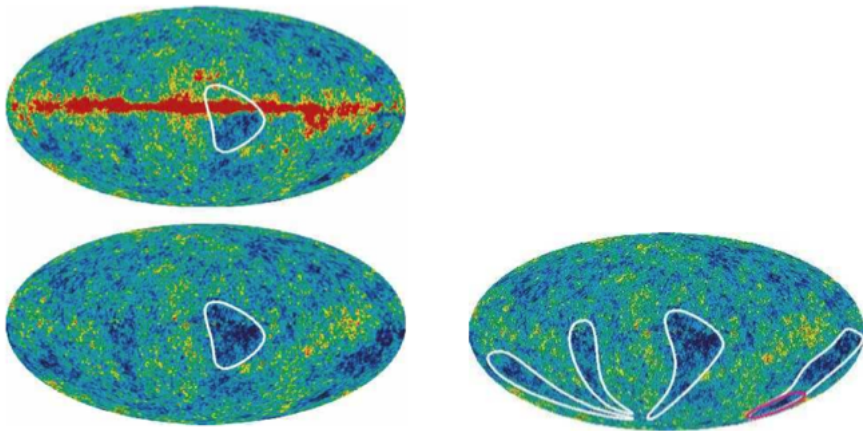


Figura : Mapa de distribución de temperatura de la RCF.

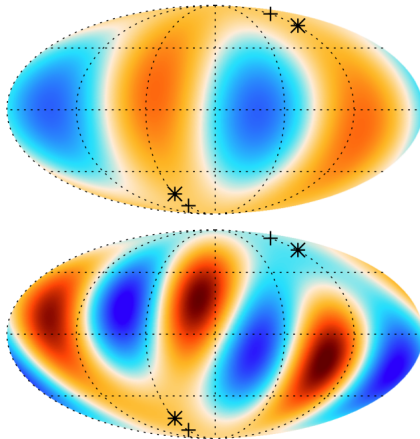


Figura : En la imagen superior se muestra el mapa derivado del cuadrupolo en la expansión multipolar de la RCF con un rango de temperaturas de $\pm 35 \mu\text{K}$ y en la imagen inferior se muestra el mapa del octupolo en la expansión multipolar de la RCF con un rango de temperaturas de $\pm 35 \mu\text{K}$.

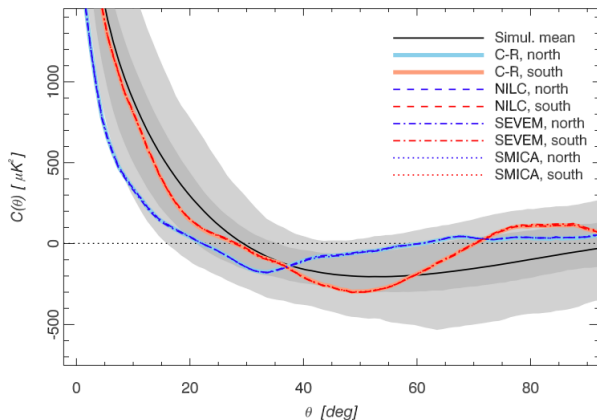


Figura : Función de correlación angular en la RCF. Se muestra el análisis realizado para el hemisferio norte (azul) y para el hemisferio sur (rojo). Las bandas sombreadas en gris oscuro y claro indican regiones de confianza del 68 % y 95 %, respectivamente.

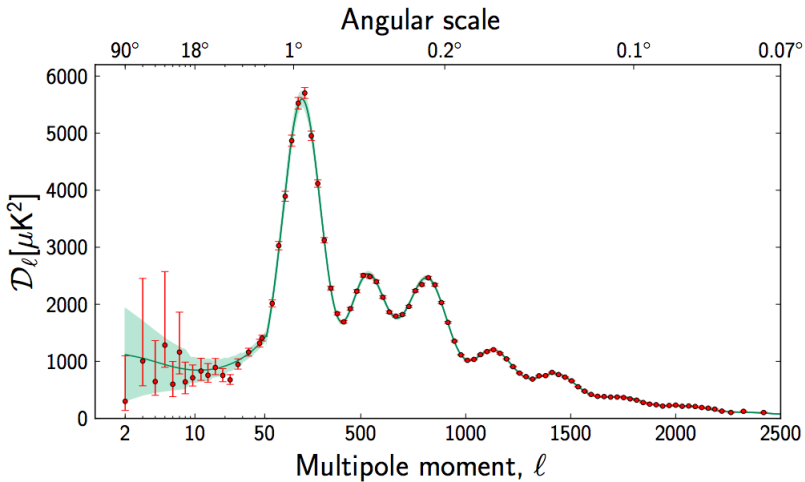


Figura : Espectro angular en la temperatura de la RCF según el primer año de resultados del satélite PLANCK.

Inflación con Campos Vectoriales

- Una posible consecuencia de las anomalías en la RCF es la presencia de anisotropía estadística, lo cual sugiere una dirección privilegiada en el Universo.
- Una posibilidad para dar cuenta de esta dirección privilegiada es mediante la implementación de campos vectoriales ⁴.
- La construcción de modelos inflacionarios que involucran campos vectoriales adolece de dos inconvenientes.

⁴K. Dimopoulos, Phys. Rev. D **74**, 083502 (2006).

S. Yokoyama y J. Soda, JCAP **0808**, 005 (2008).

M. Watanabe, S. Kanno y J. Soda, Phys. Rev. Lett. **102**, 191302 (2009).

K. Dimopoulos, M. Karčiauskas, D. H. Lyth y Y. Rodríguez, JCAP **0905**, 013 (2009).

Problema	Solución
Inavarianza conforme	▶ Masa para el campo vectorial ▶ Término cinético dependiente del tiempo
Expansión anisótropa excesiva	▶ Campo vectorial espectador durante inflación

Introducción a los Sistemas Dinámicos

- Un sistema dinámico consiste en un espacio (espacio de estado o espacio de fase) y una regla matemática que describe la evolución de cualquier punto en ese espacio.
- La forma estándar de un sistema dinámico puede ser escrita como⁵

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (6)$$

en donde $\mathbf{x}$ es un elemento del espacio de estados y $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ representa un campo vectorial.

- Se dice que la ecuación autónoma $\dot{x} = f(x)$ tiene un punto crítico si y sólo si $f(x^*) = 0$.

⁵S. Wiggins, Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Springer (1990).

Estabilidad Lineal

- Dado un sistema dinámico $\dot{x} = f(x)$ con un punto crítico $x = x_0$

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (7)$$

- Por la definición del punto crítico, $f(x_0) = 0$ con lo cual, ignorando los términos de orden superior a uno, se obtiene

$$\dot{x} = f'(x_0)(x - x_0). \quad (8)$$

- En esta configuración, se puede deducir que el punto crítico x_0
 - ❶ es estable si $f'(x_0) < 0$,
 - ❷ es inestable si $f'(x_0) > 0$,
 - ❸ tiene naturaleza desconocida, es decir, la teoría de estabilidad lineal falla si $f'(x_0) = 0$.

Hairy inflation

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - V(\phi) - \frac{1}{4} f^2(\phi) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right], \quad (9)$$

- g es el determinante de la métrica.
- R es el escalar de Ricci.
- $V(\phi)$ es el potencial del campo ϕ .
- $f(\phi)$ es una función de acoplamiento entre el campo ϕ y el campo A_μ .

$$\dot{\alpha}^2 = \dot{\sigma}^2 + \frac{\kappa^2}{3} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) + \frac{p_A^2}{2} f^{-2}(\phi) e^{-4\alpha-4\sigma} \right], \quad (10)$$

$$\ddot{\alpha} = -3\dot{\alpha}^2 + \kappa^2 V(\phi) + \frac{\kappa^2 p_A^2}{6} f^{-2}(\phi) e^{-4\alpha-4\sigma}, \quad (11)$$

$$\ddot{\sigma} = -3\dot{\alpha}\dot{\sigma} + \frac{\kappa^2 p_A^2}{3} f^{-2}(\phi) e^{-4\alpha-4\sigma}, \quad (12)$$

$$\ddot{\phi} = -3\dot{\alpha}\dot{\phi} - V'(\phi) + p_A^2 f^{-3}(\phi) f'(\phi) e^{-4\alpha-4\sigma}. \quad (13)$$

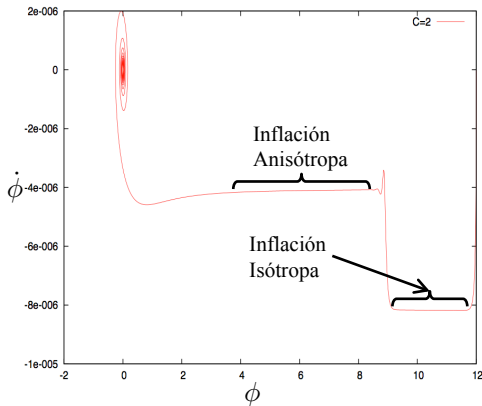


Figura : Espacio de fase para ϕ . En este caso $c = 2$ y $\kappa m = 10^{-5}$ y las condiciones iniciales para el campo escalar son: $\phi_i = 12$ y $\dot{\phi}_i = 0$.

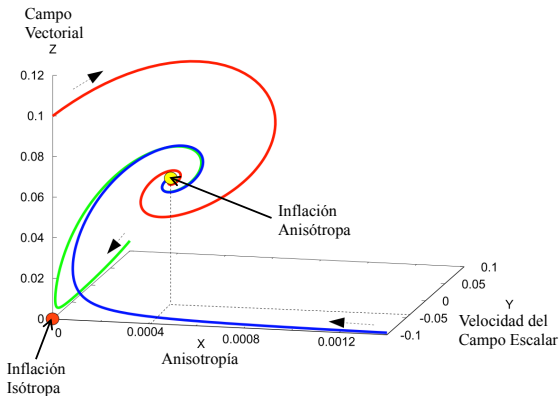


Figura : Espacio de fase $X - Y - Z$, en donde estas variables están definidas como: $X \equiv \dot{\sigma}/\dot{\alpha}$, $Y \equiv (\kappa\dot{\phi})/\dot{\alpha}$ y $Z \equiv \kappa f(\phi)e^{-\alpha+2\sigma}(\dot{v}/\dot{\alpha})$, en donde v es la componente del campo vectorial.

- Las trayectorias en verde y azul convergen a un punto crítico de inflación isótropa en rojo (sin campo vectorial).
- Cuando la contribución del campo es apreciable, en punto en rojo se convierte en un punto de silla.