

FRACTURA Y ESTABILIDAD DE CONFIGURACIONES AUTOGRAVITANTES ESFÉRICAS EN RELATIVIDAD GENERAL.

Guillermo A. González

Anamaría Navarro

Luis A. Núñez

Grupo de Investigación en Relatividad y Gravitación

Escuela de Física

Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga,
Colombia

Universidad
Industrial de
Santander



COLCIENCIAS

Departamento Administrativo de Ciencia, Tecnología e Innovación



Descripción

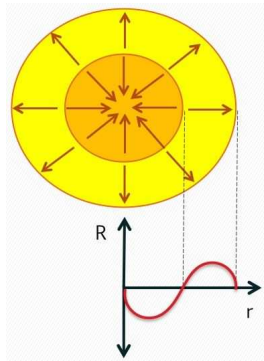
En este proyecto de investigación, hemos estudiado la estabilidad de configuraciones esféricas autogravitantes tanto isótropas como anisótropas, mediante la utilización del concepto de fractura considerando perturbaciones locales de la densidad en sistemas gobernados por ecuaciones de estado barotropas.

Contenidos

- ① Fracturas en esferas anisótropas
- ② Enfoque de Herrera
- ③ Enfoque de Abreu
- ④ Perturbaciones locales de la densidad
- ⑤ Algunos modelos analizados
- ⑥ Resultados

Fracturas en esferas anisótropas

Herrera y colaboradores [1] desarrollaron el concepto de fracturas al estudiar la estabilidad de esferas anisótropas, como un método alternativo y complementario al método tradicional.



Si ocurre una perturbación de las variables del sistema capaz de sacar el sistema de su estado de equilibrio, entonces es posible que surjan fuerzas radiales en el sistema. Si esta distribución de fuerzas cambia de signo dentro de la configuración ocurre una fractura o una compresión del sistema.

[1] *Phys. Lett. A*, 165: 206-210, 1992

Consideremos una métrica esféricamente simétrica,

$$ds^2 = e^{2\nu(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (1)$$

donde la materia corresponde a un fluido anisótropo,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P_{\perp})u_{\mu}u_{\nu} - P_{\perp}g_{\mu\nu} + (P - P_{\perp})n_{\mu}n_{\nu}, \quad (2)$$

with $u_{\mu} = (e^{\nu}, 0, 0, 0)$, $n_{\mu} = (0, -e^{\lambda}, 0, 0)$.

Calculando explícitamente $T^{\mu}_{r};_{\mu} = 0$ obtenemos

$$\mathcal{R} \equiv \frac{dP}{dr} + \frac{(\rho + P)(m + 4\pi r^3 P)}{r(r - 2m)} - \frac{2(P_{\perp} - P)}{r} = 0 \quad (3)$$

Después de una
perturbación

$$\Rightarrow \boxed{\delta\mathcal{R} \neq 0} \Rightarrow$$

**Una distribución de
fuerzas puede aparecer**

Enfoque de Herrera

Herrera y colaboradores [1,2,3] estudiaron la aparición de fracturas en sistemas estáticos con simetría esférica realizando perturbaciones independientes y simultáneas de la densidad y la anisotropía.

Sólo perturbaciones de la anisotropía pueden producir fracturas en dichos sistemas; por lo tanto, los sistemas isótropos no presentan fracturas bajo perturbaciones de la densidad.

[2] *Phys. Lett. A.*, 195:23 – 26, 1994.

[3] *Gen. Relativ. Grav.*, 29(10):1239– 1256, 1997.

Enfoque de Abreu

Abreu y colaboradores [4] estudiaron la aparición de fracturas:

- 1 Considerando ecuaciones de estado barótropas
 $P = P(\rho), P_{\perp} = P_{\perp}(\rho)$
- 2 Y realizando perturbaciones de la densidad que afectan la anisotropía a través de las ecuaciones de estado.
- 3 Las perturbaciones consideradas no afectan el gradiente de presión, por lo tanto son constantes.

$$-1 \leq v_{\perp}^2 - v^2 \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq v_{\perp}^2 - v^2 \leq 0 & \text{Potencialmente estable} \\ 0 < v_{\perp}^2 - v^2 \leq 1 & \text{Potencialmente inestable} \end{cases}$$

Perturbaciones locales de la densidad

De igual forma que Abreu y colaboradores [4] consideramos ecuaciones de estado barótropas

$$P = P(\rho), \quad P_{\perp} = P_{\perp}(\rho) \quad (4)$$

y realizamos perturbaciones de la densidad

$$\rho \rightarrow \rho + \delta\rho \quad (5)$$

de manera que la anisotropía es afectada a través de las ecuaciones de estado y no de manera independiente. La diferencia principal es que hemos considerado los efectos en el gradiente de presión P'

$$P' \rightarrow P' + \delta P'. \quad (6)$$

Ahora, con el fin de tener una expansión de Taylor del gradiente de presión que sea consistente,

$$P'(\rho + \delta\rho) = \frac{d}{dr} \left[P + \frac{dP}{d\rho} \delta\rho \right] \quad (7)$$

$$\frac{d}{dr} \delta\rho = \frac{d\rho'}{d\rho} \delta\rho \quad (8)$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\frac{d}{dr} \delta\rho \neq 0} \quad (9)$$

lo cual significa que el gradiente de presión cambia si la perturbación de la densidad es local

$$\delta\rho = \delta\rho(r) \quad (10)$$

Una perturbación local de la densidad $\rho \rightarrow \rho + \delta\rho(r)$ induce fluctuaciones en las demás variables del sistema

$$\rho + \delta\rho \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m(\rho + \delta\rho) \approx m(\rho) + \delta m \\ P(\rho + \delta\rho) \approx P(\rho) + \delta P, \\ P_{\perp}(\rho + \delta\rho) \approx P_{\perp}(\rho) + \delta P_{\perp}, \\ P'(\rho + \delta\rho) \approx P'(\rho) + \delta P', \end{array} \right. \quad (11)$$

Y dado que $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\rho, m, P, P', P_{\perp}, r)$ entonces

$$\mathcal{R}(\cdots) \approx \underbrace{\mathcal{R}(\cdots)_0}_{=0} + \delta\mathcal{R} \quad (12)$$

$\Downarrow$
 Distribución de fuerzas

$\delta\mathcal{R}$ para esferas anisótropas está dada por

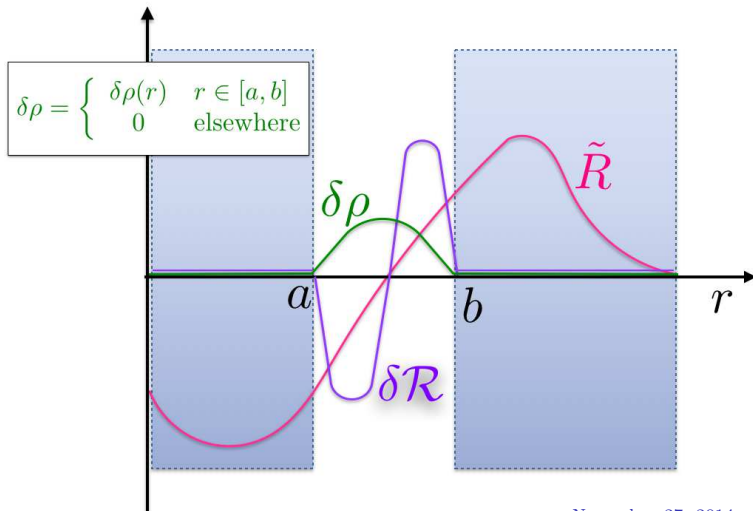
$$\delta\mathcal{R} = \delta\rho \left\{ \overbrace{\frac{4\pi r^3 P + m}{r(r-2m)} + \left(\frac{m + 4\pi r^3(\rho + 2P)}{r(r-2m)} + \frac{2}{r} \right) v^2}^{\geq 0} \right. \\ \left. + \underbrace{\frac{(\rho + P)(1 + 8\pi r^2 P)}{(r-2m)^2} \left(\frac{4\pi r^2 \rho}{\rho'} \right) - \frac{2}{r} v_{\perp}^2}_{\leq 0} + \left((v^2)' + v^2 \frac{\rho''}{\rho'} \right) \right\} \quad (13)$$

y para esferas isotrópicas:

$$\delta\mathcal{R}_{\text{iso}} = \delta\rho \left\{ \overbrace{\frac{4\pi r^3 P + m}{r(r-2m)} + \left(\frac{m + 4\pi r^3(\rho + 2P)}{r(r-2m)} \right) v^2}^{\geq 0} \right. \quad (14)$$

$$\left. + \underbrace{\frac{(\rho + P)(1 + 8\pi r^2 P)}{(r-2m)^2} \left(\frac{4\pi r^2 \rho}{\rho'} \right)}_{\leq 0} + \left((v^2)' + v^2 \frac{\rho''}{\rho'} \right) \right\}$$

$$\delta R = \delta \rho \left\{ \tilde{R}(\rho, P, P_{\perp}, \dots) \right\} \quad (15)$$

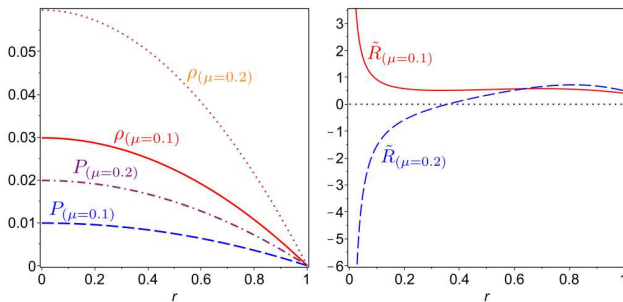


Algunos modelos analizados

Solución isótropa desarrollada por Mehra [5]

$$\rho = \frac{\rho_0(a^2 - r^2)(\sqrt{\alpha_1} + 2\sqrt{\alpha_2})^2}{a^2 \left(\alpha_1 + 4\sqrt{\alpha_1}\alpha_2 + 40\pi a^2 \rho_0 - 40\pi a^2 \rho_0 \cos\left(\frac{z-z_1}{2}\right)^2 \right)} \quad (16)$$

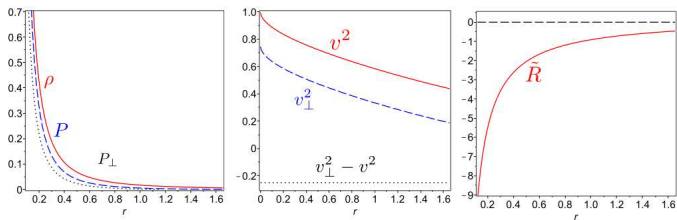
$$P = \frac{1}{3} \frac{\rho_0 (a^2 - r^2)}{a^2} \quad (17)$$



Solución anisótropa

Modelo anisótropo analizado en [1]

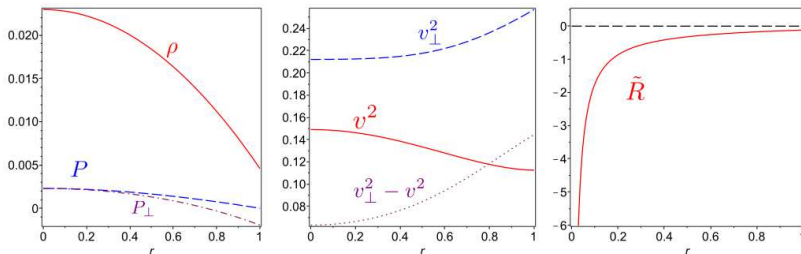
$$\rho = \frac{K}{r^2}, \quad P = \frac{K}{3r^2} \left(\frac{7 - 9r^{-1/2}}{1 - 3r^{-1/2}} \right), \quad P_{\perp} = P - \frac{\gamma}{r^2} \quad (18)$$



Solución anisótropa desarrollada por Florides-Stewart-Gokhroo-Mehra[6]

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{Kr^2}{r_0^2} \right), \quad P = \gamma \rho_0 \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right), \quad (19)$$

$$P_{\perp} = P + \frac{1}{2}rP' + \frac{(\rho + P)(m + 4\pi r^3 P)}{2(r - 2m)}. \quad (20)$$



Resultados

- Hemos extendido el criterio de Abreu y colaboradores para perturbaciones locales de la densidad $\delta\rho = \delta\rho(r)$ las cuales afectan el gradiente de presión y la función de masa del sistema.
- Encontramos que las soluciones isótropas pueden presentar cracking de igual forma que las anisótropas.
- Algunos modelos de esferas anisótropas que habían sido consideradas inestables bajo los esquemas anteriores de perturbación son estables bajo nuestro esquema, lo cual sugiere que los efectos del gradiente de presión y de la función de masa introducen cambios considerables.