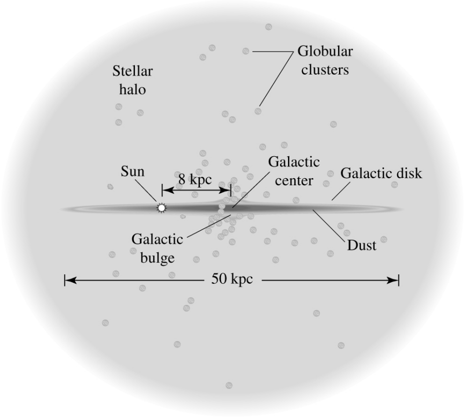
DISCOS DELGADOS AXIALMENTE SIMÉTRICOS INMERSOS EN HALOS ESFEROIDALES

Guillermo A. Gonzalez
Oscar Mauricio Pimentel Díaz

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Física

Marzo - 2014

Problema de Estudio



- Obtener soluciones exactas axialmente simétricas a las ecuaciones de Einstein que describan discos delgados en halos de materia.
  - Densidad de energía.
  - Presión.
  - Masa del sistema.
- Discos infinitos y discos finitos.
- Movimiento de partículas en orbitas circulares alrededor del disco [Vera C. Rubin y W. Ford, 1970].

Estado Generál del Tema

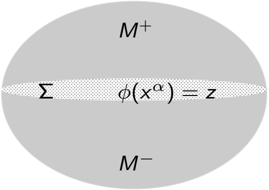
- Primeros modelos: Bonnor y Sackfield en 1968, Morgan y Morgan en 1969.
- Discos estáticos: D. Lynden-Bell y S. Pineault, 1978; P. S. Letelier y S. R. Oliveira, 1978; G. A. Gonz ález y P. S. Letelier, 1999; G. A. González y O. A. Espitia, 2003.
- Discos estacionarios: D. Lynden-Bell y S. Pineault, 1978; J. Bičák y T. Ledvinka, 1993; C. Pichon y D. Lynden-Bell, 1996.
- Discos con halo: D. Vogt y P. S. Letelier, 2003; A. C. Gutíerrez, G. A. González y H. Quevedo, 2013

Soluciones Discoidales Axialmente Simétricas con Halo

Usando el método distribucional podemos escribir las ecuaciones de Einstein como [W.Israel, 1966]

$$T^{\pm}_{\alpha\beta} = R^{\pm}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R^{\pm}, \qquad (1)$$

$$Q_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} H, \qquad (2)$$



donde $Q_{\alpha\beta}$ es el tensor de momento-energía en Σ y $H_{\alpha\beta}$ es el tensor de Ricci en Σ. Ahora, para la métrica conformestática,

$$ds^2 = -e^{2\psi} dt^2 + e^{-2\psi}(dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2), \qquad (3)$$

donde exigimos que $\psi(r, -z) = \psi(r, z)$, calculamos las cantidades físicas

$$\begin{aligned} \rho &= e^{2\psi}(2\nabla^2\psi - \nabla\psi\cdot\nabla\psi), && (4)\\ p &= \frac{1}{3}e^{2\psi}\nabla\psi\cdot\nabla\psi, && (5)\\ \sigma &= 4e^{\psi}\psi_{,z}. && (6) \end{aligned}$$

Una manera de satisfacer las condiciones de energía [S. W. Hawking y G. F. R. Ellis, 1973] es considerar funciones ψ que sean solución de la ecuación

$$\nabla^2\psi = k\nabla\psi\cdot\nabla\psi, \tag{7}$$

con $k \geq 1$ y $\psi_{,z}\big|_{z=0^+} \geq 0$. Esta elección implica la ecuación de estado para el fluido del halo

$$p = \frac{\rho}{3(2k-1)}. \tag{8}$$

La ecuación (7) se reescribe como $\nabla^2(e^{-k\psi}) = 0$, la cual se relaciona con la ecuación de Laplace $\nabla^2 U = 0$ a través de la relación $e^{-k\psi} = 1 - U$

Finalmente, para calcular la masa del sistema disco-halo, usamos la formula de Komar [E. Poisson, 2004],

$$M = 2 \int \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta} \right) m_\alpha \xi^\beta_{(t)} \sqrt{h} d^3 y, \tag{9}$$

donde m_α es el vector normal a la hipersuperficie tipo tiempo, $\xi^\beta_{(t)}$ es el vector de killing tipo tiempo y $\sqrt{h} d^3 y$ es el elemento de volumen.

Geodésicas Circulares

Resolvemos la ecuación de la geodésica para una partícula tipo tiempo que se mueve en el plano del disco y cuyo cuadri-vector velocidad es $u^\alpha = u^0(1, 0, \omega, 0)$, dando como resultado para la velocidad circular,

$$v_c^2 = \frac{rU_{,r}}{k(1 - U) - rU_{,r}} \tag{10}$$

Discos de Kuzmin-Toomre con Halo (Discos Infinitos)

Tomamos U como como [G. G. Kuzmin, 1956]

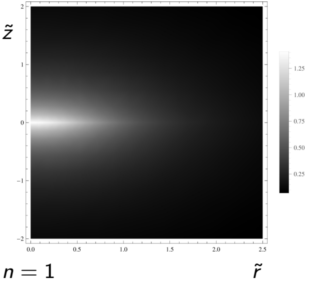
$$U_n(r,\theta) = -\sum_{l=0}^{n} \frac{A_l}{R^{l+1}} P_l(cos\theta),$$

donde $R^2 = r^2 + (|z| + a)^2$. Masa del sistema,

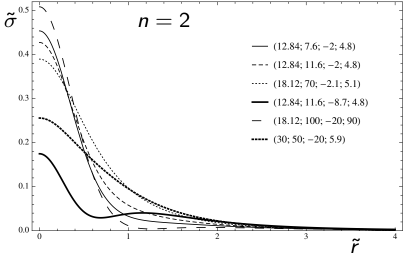
$$M_{T_0} = M_{D_0} + M_{H_0} = \frac{8\pi A_0}{k}$$

$$M_{D_0} = \frac{8\pi a}{k} \ln(1 + A_0/k)$$

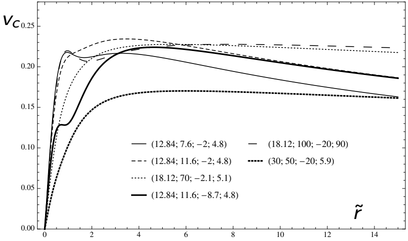
Densidad de Energía (ρ) del halo



Densidad de Energía ($\tilde{\sigma}$) del disco



Velocidad Circular ($n = 2$)



Discos de Kalnas (Discos finitos)

Tomamos U como como

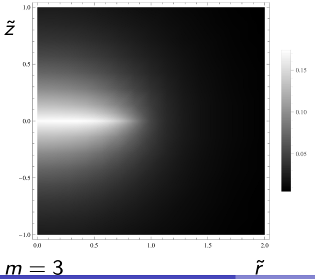
$$U(\xi,\eta) = -\sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} q_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta),$$

donde $q_{2n} = i^{2n+1} Q_{2n}(i\xi)$, con $Q_{2n}(i\xi)$ las funciones de Legendre de segundo tipo de argumento imaginario y [Guillermo A. González y Jerson I. Reina, 2006]

$$C_{2n} = \frac{M/2a}{(2n+1)q_{2n+1}(0)} \left[\frac{\pi^{1/2}(4n+1)(2m+1)!}{2^{2m}(m-n)!\Gamma(m+n+3/2)} \right],$$

si, $n \leq m$, y $C_{2n} = 0$ si $n > m$, para $m \geq 1$.

Densidad de Energia (ρ) del halo



Masa del sistema,

$$M_T = \frac{8\pi a C_0}{k}$$

$$M_{D_1} = \frac{64a}{k} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{8}{3\pi C_0}}\, arcot \sqrt{\frac{3\pi C_0}{3\pi C_0 + 8}} \right],$$