ESTUDIO DE ÓRBITAS EN CAMPOS GRAVITACIONALES AXIALMENTE SIMÉTRICOS

Sandra Milena Martínez Sicachá

Director: Dr. Guillermo Alfonso González Villegas

Universidad Industrial de Santander

Escuela de Física

Bucaramanga

2014

NATURALEZA E IMPORTANCIA DEL PROBLEMA

Una parte importante en la dinámica es el estudio de las integrales de movimiento, que implican a menudo la hipótesis de equilibrio y simetría.

En el caso de simetría axial se cumple la conservación del vector momento cinético y una componente de este vector.

En el estado estacionario intervienen cinco y no seis integrales de movimiento,

$$I_j(R, \phi, z, \dot{R}, \dot{\phi}, \dot{z}) \qquad (i = 1 \quad a \quad 5)$$

Donde si se cumple la condición $I_j = C_j$,estas integrales no aisladas son ignoradas y no intervienen en el movimiento.

PROYECTOS RELACIONADOS

- Hénon y Heiles, proponen un potencial que solucionado numéricamente y modelado con superficies de sección muestran todos los posibles casos de estabilidad e irregularidades de las órbitas.

- S. Ninkovic y B. Jovanovic, presenta un estudio de órbitas utilizando potencial de Miyamoto y Nagai usando simetría axial y esférica.

- D. Vogt y P. S. Letelier, presenta analíticamente pares potencial-densidad en superficies tridimensionales.

- Karol Salazar, Modelos tridimensional axialmente simétrico para la distribución de masa en la componente discoidal de galaxias espirales.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En el siguiente trabajo se estudian órbitas en campos gravitacionales axialmente simétricos, donde es usual emplear coordenadas cilíndricas (R, ϕ, z), con origen en el centro galáctico, R es la coordenada radial y z está en el eje de simetría.

El movimiento está gobernado por un sistema lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{R}^2 + (R\dot{\phi})^2 + \dot{z}^2) - \Phi(R, z)$$

Los momentos quedan definidos:

$$p_R = \dot{R} \qquad p_\phi = R^2\dot{\phi} \qquad p_z = \dot{z}$$

Por tanto la energía del sistema es:

$$E = \frac{1}{2}(p_R^2 + \frac{p_\phi^2}{R^2} + p_z^2) + \Phi(R, z)$$

Y a partir de la ecuación anterior se deducen las ecuaciones de movimiento:

$$\dot{p_R} = \ddot{R} = \frac{p_\phi^2}{R^3} - \frac{\partial \phi}{\partial R}; \qquad \dot{p_\phi} = \frac{d}{dt}(R^2\dot{\phi}) = 0; \qquad \dot{p_z} = \ddot{z} = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Como ϕ es una coordenada cíclica, entonces $p_\phi = l$, se deduce de la ecuación anterior: $R^2\dot{\phi} = l$.

Entonces el problema queda reducido a un sistema de dos grados de libertad en el plano (R, z), que se conoce como el plano meridional.

$$E = \frac{1}{2}(\dot{R}^2 + \dot{z}^2) + \Phi_{eff}(R, z)$$

Donde se define: $\Phi_{eff} = \Phi(R, z) + \frac{l^2}{2R^2}$, para $\Phi_{eff} < 0$

Así, la trayectoria de la partícula se reduce a solucionar el sistema de ecuaciones:

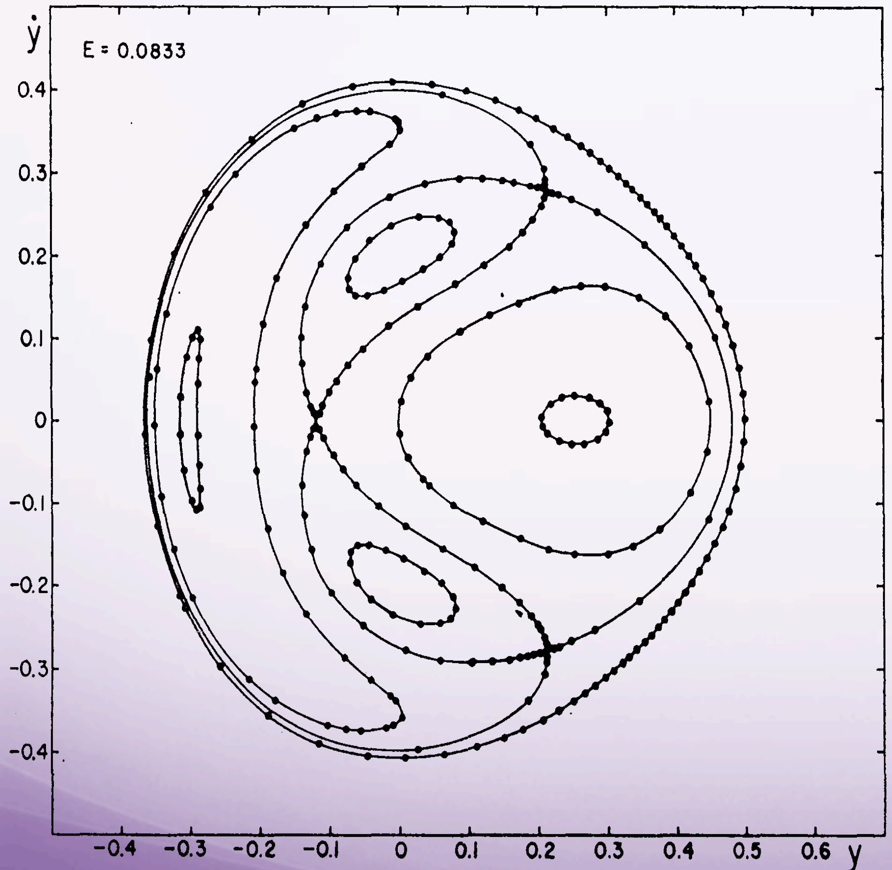
$$\ddot{R} = -\frac{\partial \phi_{eff}}{\partial R}; \qquad \ddot{z} = -\frac{\partial \phi_{eff}}{\partial z}$$

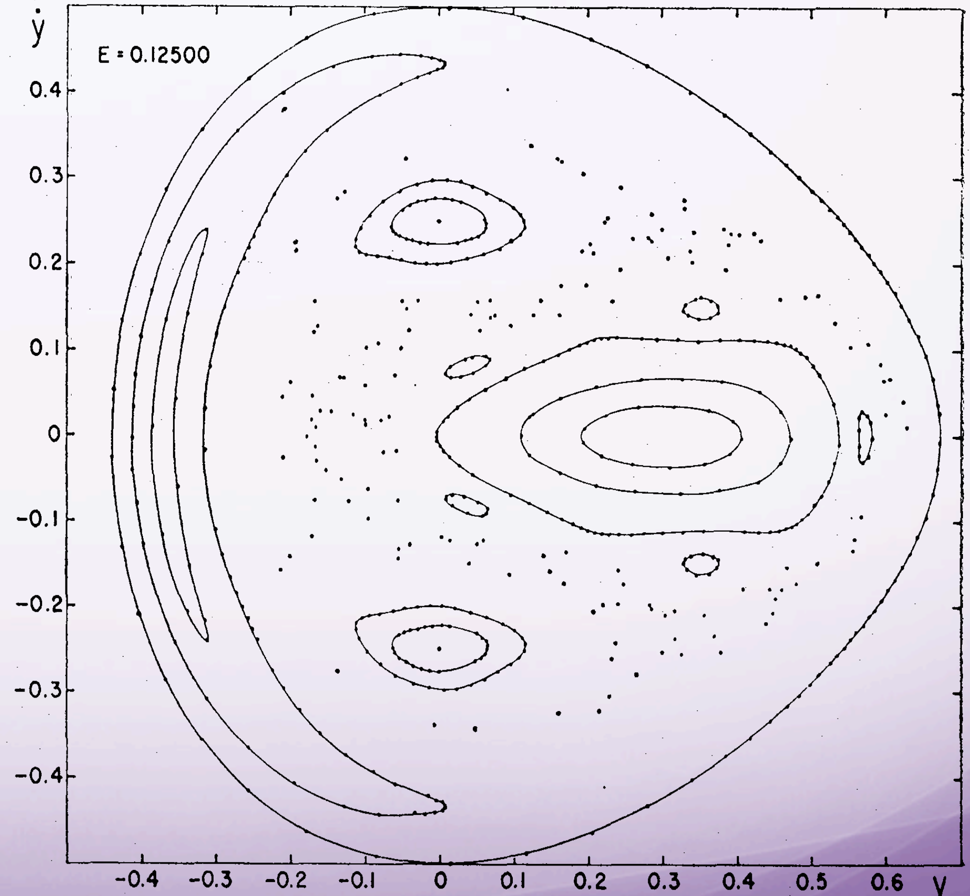
Ahora, como el movimiento es en el plano (R, z), la órbita de la partícula está completamente determinada $R(t), z(t)$.

El espacio de fase inicial $(R, z, \dot{R}, \dot{z})$, donde se reduce al subespacio tridimensional$(R, z, \dot{R})$.

Pero aun así este subespacio es difícil de visualizar por lo que se tendrá en cuenta solo el caso en que la partícula cruza el plano z=0 y finalmente el movimiento estará definido por el espacio fásico $(R, \dot{R})$.

El potencial de Hénon y Heiles: $U(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 2x^2y - \frac{2}{3}y^3)$





REFERENCIAS

- G.Contopoulos, Order and Chaos in Dynamical Astronomy, 2da ed. Springer- Verlag (2002).
- J. Binney and S. Tremaine, Galactic Dynamics. 2nd ed. Princeton University Press (2008).
- D. Vogt and P. S. Letelier,On multipolar analytical potentials for galaxies, Publ. Astron. Soc. Jap. 57, 871 (2005).
- M. Hénon and C. Heiles, The aplicability of the Third Integral of motion: some numerical experiments,The Astrophysical Journal, 69 (1964).
- S. Ninkovic and B. Jovanovic, On orbits for a particular case of axial symmetry, Astronomical Observatory (2009).